Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ:
Η ΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ένα βιβλίο από το πρόγραμμα του Ιδρύματος Nuffield
για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.
Μετάφραση: Τάσος Ανθουλιάς. Εκδόσεις Χελιδόνι, Αθήνα 1997

Ένα βιβλίο για τα Σύνολα σε μια εποχή όπου τα Σύνολα έχουν χάσει την αίγλη που είχαν στη δεκαετία του 1970; Ίσως, ακριβώς γι' αυτό. Τα Σύνολα "ενέσκηψαν" στην Ελλάδα ως μόδα και όχι ως ένα εκπαιδευτικό εργαλείο. Χωρίς καμιά παιδαγωγική προπαρασκευή, χωρίς κανένα εκπαιδευτικό στόχο, τα Σύνολα μπήκαν στο ελληνικό σχολείο. Και είδαμε να συμβαίνουν διάφορα:

Είδαμε να κυκλοφορούν βιβλία για το Νηπιαγωγείο, στα οποία "διδάσκονταν" οι έννοιες της τομής και της ένωσης (με χρήση των αντίστοιχων μαθηματικών συμβόλων). Είδαμε να γράφονται βιβλία Μαθηματικών για το Δημοτικό, όπου δινόταν περισσότερο βάρος στη θεωρία των συνόλων παρά στην έννοια των αριθμών και των πράξεων. Είδαμε στο Γυμνάσιο να μετατρέπεται η θεωρία των συνόλων σε "κεφάλαιο" των Μαθηματικών, το οποίο (φυσικά) το "ξεχνούσαν" μόλις το τέλειωναν. Το μόνο, βέβαια, που δεν είδαμε ήταν να καλλιεργείται η μαθηματική (λογική) σκέψη των παιδιών...

Ίσως, λοιπόν, τώρα, που η μόδα πέρασε, μπορούμε να αρχίσουμε να βλέπουμε λίγο πιο καθαρά, πιο επιστημονικά. Πρώτα, όμως, θα πρέπει να δώσουμε μια ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα: γιατί διδάσκουμε τα Μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και σε όλα τα παιδιά;

Η παραδοσιακή απάντηση είναι πως η διδασκαλία των Μαθηματικών καλλιεργεί τη σκέψη και την κρίση των μαθητών και γι' αυτό όλα τα παιδιά διδάσκονται Μαθηματικά. Αυτή η απάντηση, όμως, δεν είναι καθόλου ικανοποιητική. Εκτός κι αν δεχτούμε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των παιδιών είναι ανίκανη για σκέψη και κρίση – αφού δεν έχει ικανοποιητική απόδοση στα Μαθηματικά.

Από το άλλο μέρος, πολλοί δικαιολογούν την αποτυχία της πλειοψηφίας των παιδιών στην προσέγγιση των Μαθηματικών με το "απόφθεγμα" ότι τα Μαθηματικά είναι μόνο για τους λίγους, τους "έξυπνους". Βέβαια, αν αυτό είναι αληθινό, τότε με ποια λογική όλα τα παιδιά είναι υποχρεωμένα να διδάσκονται Μαθηματικά; Γιατί δεν ξεχωρίζουμε τα "ικανά", ώστε να διδάσκουμε τα Μαθηματικά μόνο σ' αυτά (και να μη βασανίζουμε τα υπόλοιπα);

Οι αντιφάσεις που αναφέρθηκαν (και που δεν είναι οι μόνες) οφείλονται στην ασάφεια της ίδιας της έννοιας "διδασκαλία των Μαθηματικών". Για ποια Μαθηματικά μιλούμε; Τα Μαθηματικά είναι ένας τρόπος περιγραφής της πραγματικότητας και των σχέσεων που διέπουν αυτή την πραγματικότητα. Ανάλογα με το επίπεδο προσέγγισης της πραγματικότητας, τα Μαθηματικά που χρησιμοποιούμε είναι "διαφορετικά". Επομένως, πρώτα θα πρέπει να ορίσουμε το επίπεδο προσέγγισης της πραγματικότητας, το οποίο επιδιώκουμε σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσης.

Όσο τα Μαθηματικά είναι αποκομμένα από την πραγματικότητα που περιγράφουν, όσο δεν παρουσιάζονται στους μαθητές ως εργαλείο αναγνώρισης και διερεύνησης της πραγματικότητας, τόσο και θα οδηγούν σε αδιέξοδο την εκπαίδευση.

Τα Σύνολα δεν βοήθησαν σε τίποτα την εκπαίδευσή μας γιατί δεν αντιμετωπίστηκαν ως μέσο περιγραφής της πραγματικότητας, αλλά μετατράπηκαν σε σκοπό – σε αυτοσκοπό. Έτσι, φτάσαμε να διδάσκουμε τη θεωρία των συνόλων σαν ένα άθροισμα νέων ορισμών, θεωρημάτων και τύπων, δίπλα σε αναρίθμητους άλλους ορισμούς και τύπους.

Κι όμως, τα Σύνολα ήταν και παραμένουν η πιο ολοκληρωμένη περιγραφή της πραγματικότητας. Ξεπερνώντας τη μυθολογία των "τύπων", βοηθούν σε μια απλή και καθαρή προσέγγιση των σχέσεων ανάμεσα στα στοιχεία της πραγματικότητας. Επιπλέον, η θεωρία των Συνόλων συνδέει τα Μαθηματικά με τη λογική, στοιχείο πολύ σημαντικό για τους στόχους ενός σύγχρονου σχολείου.

Το βιβλίο αυτό, που βασίζεται στο Πρόγραμμα για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών του Ιδρύματος Nuffield (του Πανεπιστημίου του Λονδίνου), αποτελεί μια εισαγωγή στη λογική με την πιο πλατιά έννοια της λέξης. Βασικός σκοπός του είναι να βοηθήσει τα παιδιά ηλικίας 8 ως 15 χρόνων να σκεφτούν καθαρά και λογικά. Στα Μαθηματικά –και, ακόμα περισσότερο, στη Μαθηματική λογική– η γλώσσα χρησιμοποιείται με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Σε αυτό το βιβλίο, τα παιδιά οδηγούνται να συνειδητοποιήσουν τον τρόπο, με τον οποίο χρησιμοποιούν τις πιο σημαντικές για τη λογική λέξεις, καθώς και στο να εκφραστούν όσο μπορούν πιο καθαρά και θετικά. Η έμφαση δίνεται πάνω στη γλώσσα που χρησιμοποιείται στην καθημερινή ζωή.

Αυτό που θέλει να αποδείξει το βιβλίο είναι ότι τα Μαθηματικά έχουν σκοπό να βοηθήσουν στην κατανόηση της πραγματικότητας και γι' αυτό μπορούν να ενδιαφέρουν και να γίνουν κατανοητά από όλα (ή, έστω, σχεδόν όλα) τα παιδιά.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΕΙΣ

1. Τα παιδιά στην τάξη

Ο πιο άμεσος τρόπος για να διδάξουμε στα παιδιά πώς να βάζουν τη σκέψη τους σε τάξη και πώς να εκφράζονται καθαρά είναι να προσφέρουμε σε αυτά μερικές εμπειρίες από τη στοιχειώδη λογική. Για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης υπάρχουν ορισμένες λέξεις-κλειδιά, όπως **όλα**, **μερικά**, **κανένα**, **και**, **ή**, **δεν**, **αν**. Μια ποικιλία από εμπειρίες ομαδοποίησης και ταξινόμησης θα βοηθήσουν πολύ τα παιδιά στο να καταλάβουν την ακριβή σημασία αυτών των λέξεων και στο να μάθουν να τις χρησιμοποιούν με τον κατάλληλο τρόπο.

Τα ίδια τα παιδιά της τάξης μπορούν να χωριστούν με πολλούς τρόπους. Χρησιμοποιώντας μόνο δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες μπορούν να εμφανιστούν πολλές διαφορετικές καταστάσεις. Η πιο απλή είναι ίσως αυτή, στην οποία οι δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες (για παράδειγμα: είναι αγόρι, είναι κορίτσι) διαμερίζουν το σύνολο των μαθητών της τάξης σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα[*]. Αλλά η ειδική φύση αυτής της κατάστασης γίνεται καθαρότερη αν αρχίσουμε με μια λιγότερο απλή. Έτσι, αν ο δάσκαλος ζητήσει από τα παιδιά που το πρωί ήπιαν γάλα να σταθούν στη μια πλευρά της αίθουσας και από τα παιδιά που ήπιαν γάλα-κακάο στην άλλη πλευρά, είναι πολύ πιθανό μερικά παιδιά να μείνουν καθισμένα στη θέση τους. Και τότε μπορεί να ερωτηθούν τα παιδιά που σηκώθηκαν γιατί μερικοί συμμαθητές τους παρέμειναν καθισμένοι. Αν τώρα ο δάσκαλος ζητήσει από τα αγόρια να σταθούν στη μια πλευρά και από τα κορίτσια στην άλλη, τότε κανένα παιδί δεν θα μείνει καθισμένο. Συζητώντας αυτές τις δύο καταστάσεις, οι διαφορές θα γίνουν καθαρές. Ένα παιδί θα είναι αγόρι **ή** κορίτσι: **όλα** τα παιδιά που **δεν** είναι αγόρια θα είναι κορίτσια και το αντίστροφο. Αλλά δεν είναι αλήθεια (τουλάχιστο αν αυτό το παράδειγμα είναι κατάλληλο για τη συγκεκριμένη τάξη) ότι ένα παιδί θα έχει πιει γάλα ή γάλα-κακάο: **μερικά** δεν θα έχουν πιει ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Δύο χαρακτηριστικά, τα οποία μπορούν να χωρίζουν τα παιδιά μιας τάξης σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα που όμως (συνήθως) δεν περιλαμβάνουν όλα τα παιδιά, είναι για παράδειγμα:

Έχει γαλανά μάτια, έχει καστανά μάτια.
Έχει δύο παππούδες που ζουν, έχει έναν παππού που ζει.
Είναι το πιο μικρό στην οικογένεια, έχει ένα μικρότερο αδελφάκι.

Από το άλλο μέρος, τα παρακάτω ζευγάρια χαρακτηριστικών συνήθως διαμερίζουν τα παιδιά της τάξης σε δύο σύνολα. Κάθε παιδί θα ανήκει ή στο ένα σύνολο ή στο άλλο (αλλά κανένα παιδί και στα δύο).

Φοράει γυαλιά, δεν φοράει γυαλιά.
Έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα, δεν έχει γενέθλια αυτόν τον μήνα.
Είναι μεγαλύτερο από 9 χρόνων, είναι μικρότερο από 9 χρόνων.
Δεν έχει κάνει καμιά απουσία αυτόν τον μήνα, έχει κάνει τουλάχιστο μια απουσία αυτόν τον μήνα.

[*] Οι βασικές έννοιες και ιδιότητες των συνόλων δίνονται στο βιβλίο μας *Προετοιμάστε το παιδί σας για την Α δημοτικού στα Μαθηματικά* (εκδόσεις Α.Α. Λιβάνη).

Ήταν πάντα σε αυτό το σχολείο, έχει πάει και σε άλλο σχολείο.
Μένει σε μονοκατοικία, μένει σε διαμέρισμα.
Γράφει με το αριστερό χέρι, γράφει με το δεξί χέρι.

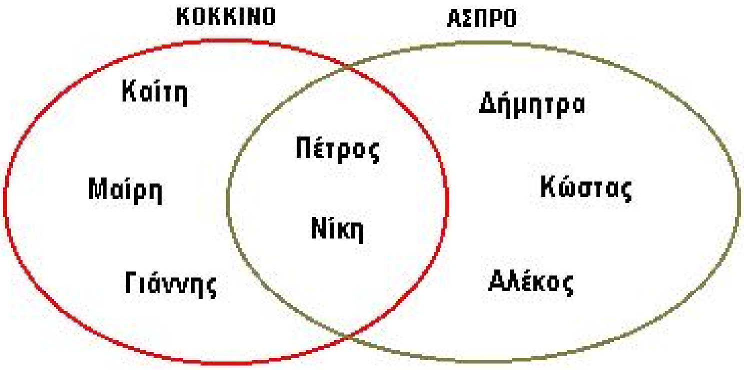
Δύο πολύ ενδιαφέροντα σημεία θα εμφανιστούν μέσα από τη συζήτηση παραδειγμάτων όπως τα παραπάνω. Πρώτο: όταν ένα από τα δύο χαρακτηριστικά είναι η άρνηση του άλλου (φοράει γυαλιά, δεν φοράει γυαλιά) τότε κάθε παιδί της τάξης θα ανήκει αναγκαστικά ή στο ένα σύνολο ή στο άλλο. Βέβαια, αυτό μπορεί να συμβεί και σε άλλες περιπτώσεις. Αλλά στην περίπτωση που αναφέρουμε, τα παιδιά θα πρέπει να καταλάβουν πως αυτό θα συμβεί υποχρεωτικά. Δεύτερο: ακόμη και τα πολύ απλά παραδείγματα που έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα θα κάνουν φανερή την ανάγκη για προσεκτικές και ακριβείς διευκρινίσεις και θα δείξουν πως μερικές φαινομενικά καθαρές διατυπώσεις μπορούν στην πραγματικότητα να ερμηνευτούν διαφορετικά από διαφορετικούς ανθρώπους. Αν ο Γιάννης έχει δύο μικρότερα αδελφάκια, με κάποια έννοια, βέβαια, έχει ένα μικρότερο αδελφάκι. Αλλά η φράση «έχει ένα μικρότερο αδελφάκι» σημαίνει «έχει τουλάχιστον ένα και ίσως και περισσότερα» ή «έχει ένα και μόνο ένα»;

Το πρώτο παράδειγμα που αναφέρθηκε (ήπιε το πρωί γάλα, ήπιε το πρωί γάλα-κακάο) είχε προσεκτικά διατυπωθεί, ώστε να αποφύγουμε οποιαδήποτε πιθανότητα αμφιβολίας. Αλλά, μετά από αυτό, είναι χρήσιμο ο δάσκαλος να μεταχειρίζεται εκφράσεις χωρίς να προσπαθεί να προβλέψει και να αποφύγει όλες τις πιθανές διαφορετικές ερμηνείες, αν και κάτι τέτοιο είναι, έτσι κι αλλιώς, τις πιο πολλές φορές σχεδόν αδύνατο. Η συζήτηση πάνω στις διαφορετικές ερμηνείες είναι πολύτιμη. Όταν παρουσιαστεί κάποια αμφιβολία για μια έκφραση που χρησιμοποίησε ο δάσκαλος, τα παιδιά θα αντιληφθούν πως ξεπηδά μια σειρά από ερωτήσεις: τι σημαίνει συνήθως αυτή η έκφραση; τι μπορεί να σημαίνει σ' αυτή την περίπτωση; ποια ήταν η πρόθεση του δασκάλου; (Μόνο ο ίδιος ο δάσκαλος μπορεί να απαντήσει στην τελευταία ερώτηση).

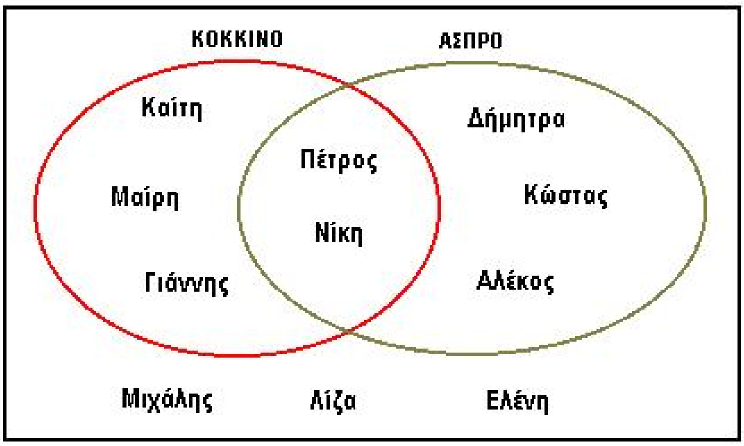
Συζήτηση και διευκρινίσεις χρειάζονται στα περισσότερα από τα παραδείγματα που έχουν αναφερθεί παραπάνω: Το «φοράει γυαλιά» σημαίνει «τώρα», «πάντα» ή «μερικές φορές»; Το «γράφει με το αριστερό χέρι» σημαίνει «είναι ικανό να γράψει με το αριστερό χέρι» ή «προτιμά να γράφει με το αριστερό χέρι» ή «πάντα γράφει με το αριστερό χέρι»; Όσο για τα «έχει γαλανά μάτια» και «έχει καστανά μάτια» είναι πραγματικά τόσο αμφίβολα, ώστε, μετά από κάποια συζήτηση, τα παιδιά να τα θεωρήσουν εντελώς ακατάλληλα για ένα χωρισμό.

Όλα τα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα αναφέρονται σε δύο χαρακτηριστικά που το ένα αποκλείει το άλλο (ή τουλάχιστον αυτή ήταν η πρόθεσή μας).

Αν τώρα ο δάσκαλος ζητήσει από τα παιδιά που φορούν κάτι κόκκινο να σταθούν στη μια πλευρά της τάξης και από τα παιδιά που φορούν κάτι άσπρο να σταθούν στην άλλη πλευρά, θα παρουσιαστεί ένα πρόβλημα. Είναι πιθανό πως θα υπάρξουν μερικά παιδιά που θα φορούν και κάτι κόκκινο και κάτι άσπρο. (Αν όχι, δοκιμάζουμε με κάποιο άλλο ζευγάρι χρωμάτων). Ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να εξηγήσουν γιατί μια παρόμοια δυσκολία δεν είχε εμφανιστεί νωρίτερα και να προτείνουν διάφορους τρόπους για να παραστήσουν τη νέα αυτή κατάσταση. Για παράδειγμα, μπορεί να προταθεί να σταθούν τα παιδιά που φορούν κάτι κι από τα δύο χρώματα ανάμεσα στα παιδιά που φορούν κάτι κόκκινο και σ' αυτά που φορούν κάτι άσπρο ή να σταθούν πρώτα με το ένα σύνολο κι έπειτα με το άλλο. Αν τώρα δώσουμε στα παιδιά δύο μεγάλα κορδόνια (στην περίπτωση αυτή το ένα μπορεί να είναι κόκκινο και το άλλο άσπρο) θα μπορέσουν να ανακαλύψουν, με μια μικρή βοήθεια από τον δάσκαλο αν το κρίνει αναγκαίο, πώς να τοποθετηθούν μέσα σ' αυτά, έτσι ώστε τα παιδιά που φορούν κάτι άσπρο να είναι μέσα στο άσπρο κορδόνι, εκείνα που φορούν κάτι κόκκινο μέσα στο κόκκινο κορδόνι κι εκείνα που φορούν κάτι κι από τα δύο χρώματα μέσα και στα δύο κορδόνια. Φυσικά, αυτό αποτελεί τη βασική αρχή του διαγράμματος του Venn. Αλλά είναι πιο εύκολο για τα παιδιά να τοποθετηθούν κατάλληλα μέσα στα κορδόνια, παρά να κάνουν ένα σχέδιο με κιμωλία στο πάτωμα, πράγμα που μπορεί να γίνει κατόπιν. Τέλος, μια γραφική παράσταση της κατάστασης μπορεί να σχεδιαστεί στον πίνακα, δίνοντας ένα αληθινό Βένιο διάγραμμα, στο οποίο τα παιδιά παρασταίνονται με τα ονόματά τους:



Κάθε παιδί θα πρέπει να μπορεί να πει γιατί πήγε στη θέση που είναι τώρα. Για παράδειγμα, ο Γιάννης βρίσκεται εκεί γιατί φοράει κάτι κόκκινο αλλά δεν φοράει κάτι άσπρο. Επίσης, μπορούμε να ρωτήσουμε τα παιδιά γιατί ακόμα κάθονται ορισμένα από αυτά (των οποίων τα ονόματα δεν έχουν μέχρι τώρα εμφανιστεί στο διάγραμμα). Φυσικά, θα είναι εκείνα που δεν φορούν ούτε κάτι κόκκινο ούτε κάτι άσπρο. Θα μπορούσαν να σταθούν κοντά στα άλλα παιδιά αλλά έξω από τα κορδόνια κι έτσι θα φανεί καθαρά σε ποια θέση του διαγράμματος πρέπει να γραφούν τα ονόματά τους:



Το μεγάλο ορθογώνιο μπορεί να θεωρηθεί σαν το περίγραμμα όλου του διαγράμματος, που περικλείνει το συζητούμενο σύνολο. Μέχρι τώρα το σύνολο αυτό ήταν πάντα «τα παιδιά της τάξης». Μερικά ζευγάρια χαρακτηριστικών που συνήθως έχουν τα ίδια αποτελέσματα με το τελευταίο παράδειγμα μπορούν να είναι:

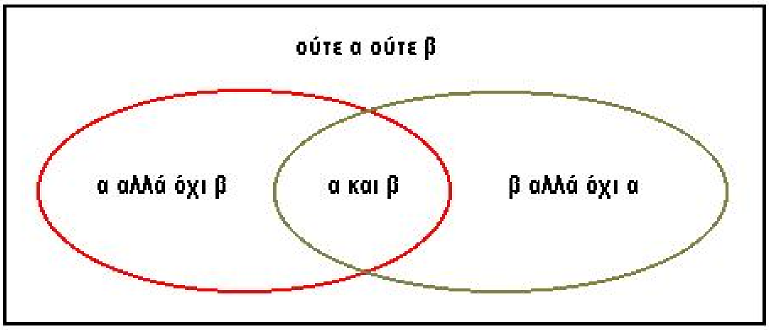
Έχει έναν αδελφό, έχει μια αδελφή.
Παρακολουθεί τακτικά κάποιο πρόγραμμα της τηλεόρασης, παρακολουθεί τακτικά κάποιο άλλο πρόγραμμα.
Έχει επίθετο που αρχίζει από φωνήεν, έχει μικρό όνομα που αρχίζει από φωνήεν.
Ξέρει να κολυμπά, ξέρει να χορεύει.
Του αρέσει το τσάι, του αρέσει το κακάο.

Όπως συνήθως, θα παρουσιαστούν αμφιβολίες που χρειάζονται συζήτηση.

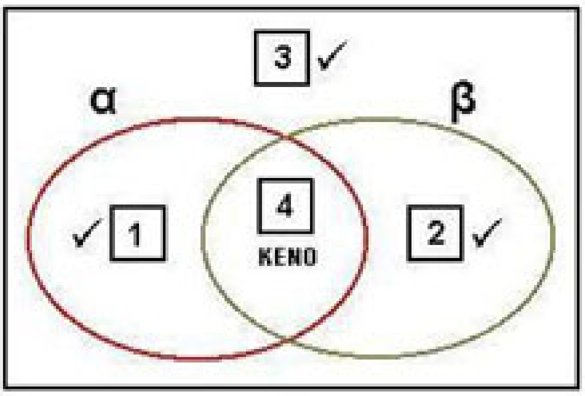
Αντί να κρατούν κορδόνια, μπορούμε τώρα να ζητήσουμε από τα παιδιά να σταθούν στην κατάλληλη θέση σ' ένα διάγραμμα που έχει γίνει από κορδόνια τοποθετημένα στο πάτωμα ή να γράψουν τα ονόματά τους στην κατάλληλη θέση σ' ένα διάγραμμα σχεδιασμένο στον πίνακα ή σ' ένα φύλλο χαρτιού. Τα παιδιά σύντομα θα δουν πως με δύο χαρακτηριστικά **α** και **β** (για παράδειγμα **α**: του αρέσει το τσάι, **β**: του αρέσει το κακάο) η τάξη συνήθως διαμερίζεται όχι σε 2 αλλά σε 4 ξένα μεταξύ τους σύνολα που αντιστοιχούν στα:

1. **α** αλλά όχι **β** (του αρέσει το τσάι, αλλά δεν του αρέσει το κακάο)
2. **β** αλλά όχι **α** (του αρέσει το κακάο, αλλά δεν του αρέσει το τσάι)
3. **α** και **β** (του αρέσει το τσάι και του αρέσει το κακάο)
4. ούτε **α** ούτε **β** (δεν του αρέσει το τσάι, δεν του αρέσει το κακάο)

Το Βένιο διάγραμμα που εικονίζει τα παραπάνω είναι αυτό:

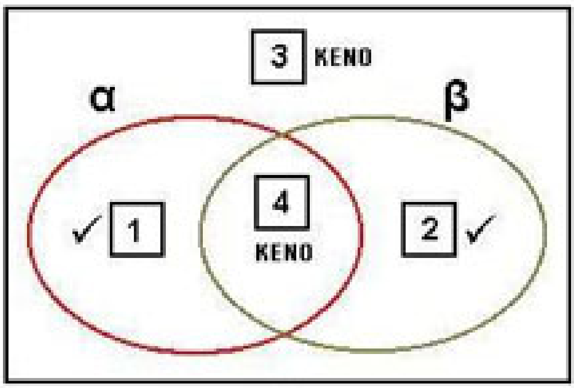


Βέβαια, ορισμένες φορές ένα ή περισσότερα από τα σύνολα μπορεί να είναι κενά, δηλαδή να μην έχουν στοιχεία. Έτσι, αρχίζουμε με παραδείγματα του τύπου:



I

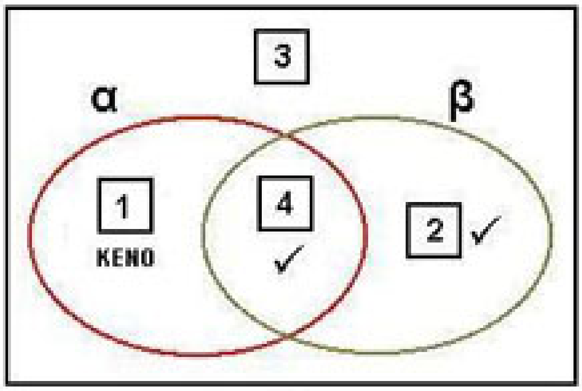
ή του τύπου:



ΙΙ

όπου ένα ✓ φανερώνει την παρουσία στοιχείων. Η περίπτωση **ΙΙ** εμφανίζεται όταν όλα τα παιδιά είναι ή **α** ή **β** (έτσι το σύνολο 3 είναι κενό) και κανένα παιδί δεν είναι και **α** και **β** (έτσι το σύνολο 4 είναι κενό). Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται καθαρά όταν **α**: είναι αγόρι και **β**: είναι κορίτσι.

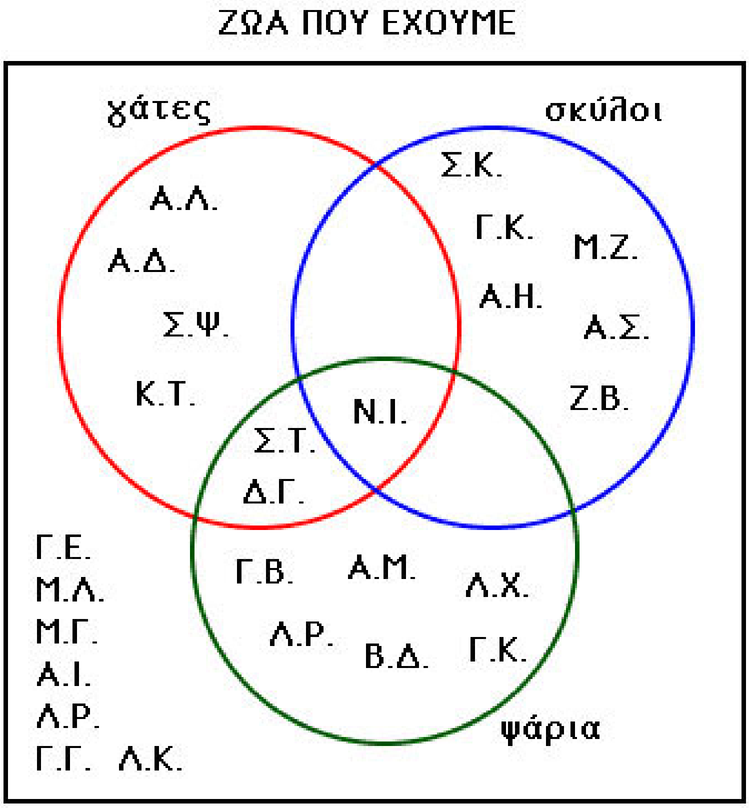
Μερικά από τα ζευγάρια χαρακτηριστικών που έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα μπορούν να οδηγήσουν στην εμφάνιση άλλων περιπτώσεων με κενά σύνολα, ιδιαίτερα στην παρακάτω περίπτωση (όπου, για την ώρα, δεν μας ενδιαφέρει αν το σύνολο 3 είναι κενό ή όχι):



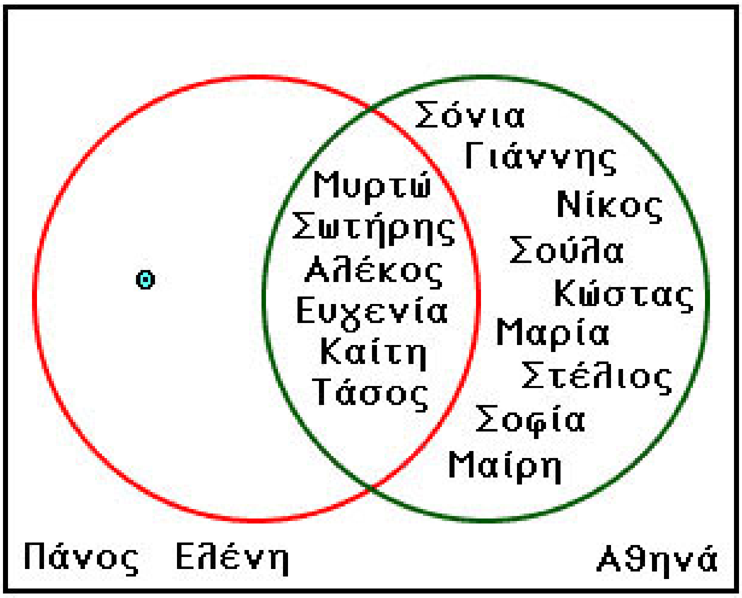
ΙΙΙ

Αν αυτή η περίπτωση δεν έχει κιόλας εμφανιστεί, ο δάσκαλος, γνωρίζοντας την τάξη, μπορεί εύκολα να βρει κατάλληλα παραδείγματα. Ας πούμε, αν όλα τα παιδιά είναι ηλικίας μεταξύ οχτώμισι και εννιάμισι χρόνων, τότε το ζευγάρι των χαρακτηριστικών **α**: είναι μικρότερο από 9 χρόνων, **β**: είναι μικρότερο από 10 χρόνων, θα οδηγήσει στο διάγραμμα **ΙΙΙ**. Το ίδιο θα συμβεί αν μερικά από τα κορίτσια (αλλά όχι όλα) φορούν μπλούζα και δώσουμε το ζευγάρι των χαρακτηριστικών **α**: φοράει φούστα, **β**: είναι κορίτσι. Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να ζητήσουμε από τα παιδιά να εξηγήσουν γιατί το σύνολο 1 είναι κενό. Θα πρέπει να περιμένουμε μερικές μπερδεμένες, άσχετες και λαθεμένες απαντήσεις πριν ακουστεί η απλή απάντηση πως «όλα τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια». Αυτή την ώρα μπορεί να εμφανιστεί και το ερώτημα για την αλήθεια της αντίστροφης πρότασης. Αν «όλα τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια», είναι αλήθεια πως «όλα τα κορίτσια φορούν φούστα»; Βέβαια, αυτό δεν είναι αναγκαστικά αληθινό και η αναγνώριση της διαφοράς ανάμεσα στις δύο προτάσεις αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στάδια στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αν και «**όλα** τα παιδιά που φορούν φούστα είναι κορίτσια», μπορούμε να υποστηρίξουμε μόνο πως «**μερικά** από τα κορίτσια φορούν φούστα».

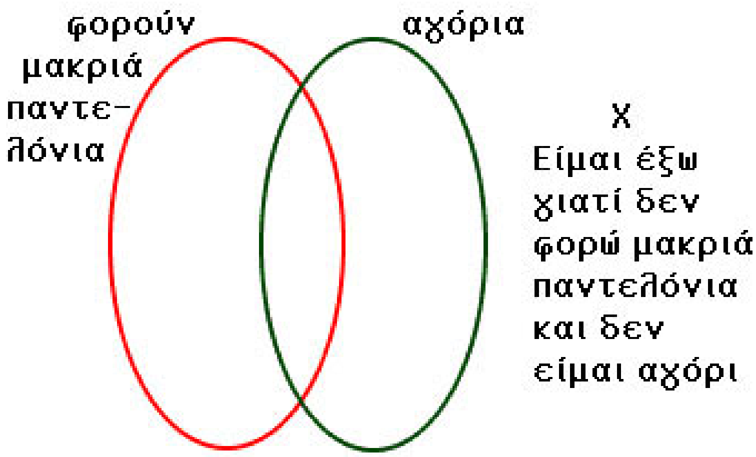
Παραδείγματα:

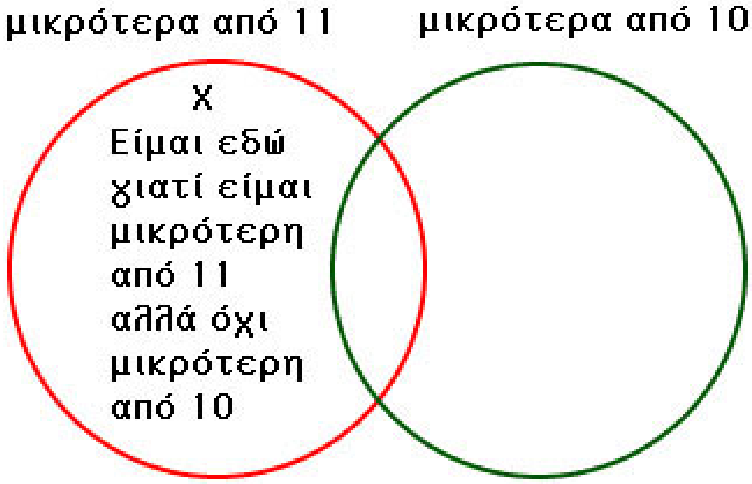


ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΜΟΥ



Δεν υπάρχουν παιδιά εκεί που είναι το ⊙ γιατί δεν μπορεί ένα παιδί να είναι μικρότερο από 9 χρόνων και να μην είναι μικρότερο από 10.





2. Όλα και μερικά

Η περίπτωση που αναφέρθηκε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου αναπτύσσεται καλύτερα με τη χρησιμοποίηση συνόλων διαφορετικών από «τα παιδιά της τάξης». Αρκετή χρήσιμη εργασία μπορεί να γίνει με γεωμετρικά σχήματα φτιαγμένα από χαρτόνι και κατασκευασμένα από τα ίδια τα παιδιά.

Μπορούμε να αρχίσουμε με σχήματα όπως τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλους και ελλείψεις, σε διάφορα χρώματα, όπως κόκκινα, μπλε, πράσινα και κίτρινα. Πρώτα, ο δάσκαλος μπορεί να ζητήσει από 2 ή 3 παιδιά να χωρίσουν το σύνολο αυτό των σχημάτων με τρεις διαφορετικούς τρόπους (όποιους θέλουν), εξηγώντας ταυτόχρονα πώς το κάνουν. Θα πρέπει να αναμένεται ένας διαμερισμός σε 5 υποσύνολα ανάλογα με το σχήμα, επίσης ένας διαμερισμός σε 4 υποσύνολα ανάλογα με το χρώμα και ίσως ένας διαμερισμός σε δύο υποσύνολα – ένα με τα σχήματα που έχουν ευθύγραμμες πλευρές και ένα με τους κύκλους και τις ελλείψεις. Έπειτα μπορεί να δώσει στα παιδιά δύο κορδόνια για να σχηματίσουν με αυτά δύο κλειστά περιγράμματα, στο ένα από τα οποία να βάλουν όλα τα τρίγωνα και στο άλλο όλα τα κόκκινα σχήματα. Αν υπάρχει ένα κόκκινο τρίγωνο, τα περιγράμματα θα πρέπει να επικαλύπτονται σε ένα τμήμα τους και από τα παιδιά θα ζητηθεί να εξηγήσουν γιατί τοποθέτησαν κάθε σχήμα στη συγκεκριμένη του θέση.

Αν τα σχήματα που δίνονται στα παιδιά είναι διαλεγμένα προσεκτικά, θα παρουσιαστούν καταστάσεις, όπου η χρήση των λέξεων **όλα** και **μερικά** θα απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή. Έτσι, μπορούμε να δώσουμε στα παιδιά δύο κορδόνια (για περιγράμματα) και ένα σύνολο που να περιλαμβάνει 3 κόκκινα, 2 μπλε και 2 κίτρινα τρίγωνα, 1 μπλε και 1 κίτρινο τετράγωνο, 3 μπλε εξάγωνα, 1 κίτρινο κύκλο, 2 μπλε και 2 πράσινες ελλείψεις. Και να κάνουμε τις παρακάτω εργασίες και ερωτήσεις:

> *Να περικλείσετε με το ένα κορδόνι όλα τα τρίγωνα και με το άλλο όλα τα μπλε σχήματα. Ποια σχήματα περικλείνονται και από τα δύο κορδόνια; Περιγράψτε με τον πιο σύντομο τρόπο που μπορείτε τα σχήματα που βρίσκονται έξω κι από τα δύο κορδόνια.*

Αν τα κορδόνια τοποθετηθούν έτσι που να μην επικαλύπτονται, μπορείτε να βάλετε μέσα στο ένα όλα τα κόκκινα σχήματα και στο άλλο όλες τις ελλείψεις; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;
Είναι όλα τα κόκκινα σχήματα τρίγωνα; Είναι όλα τα τρίγωνα κόκκινα;

Να περικλείσετε με το ένα κορδόνι όλα τα τρίγωνα και με το άλλο όλα τα κόκκινα σχήματα. Τι υπάρχει στο δεύτερο κορδόνι και δεν υπάρχει στο πρώτο;

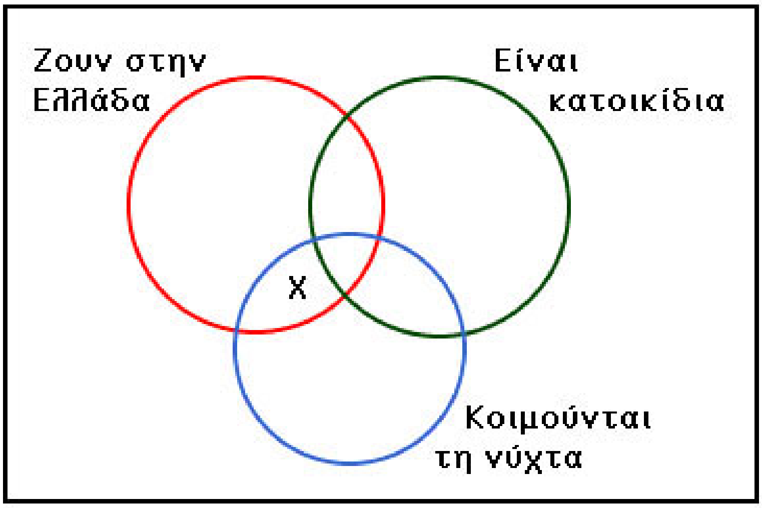
Βάλτε τα περισσότερα σχήματα που μπορείτε σε ένα σωρό, στον οποίο όλα τα μπλε σχήματα να είναι ελλείψεις. Είναι όλες οι ελλείψεις στο σωρό σας μπλε; Ποια σχήματα δεν είναι στο σωρό σας;

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθινές και ποιες δεν είναι;
Όλα τα εξάγωνα είναι μπλε.
Όλα τα μπλε σχήματα είναι εξάγωνα.
Κανένα από τα τρίγωνα δεν είναι πράσινο.
Κανένα από τα πράσινα σχήματα δεν είναι τρίγωνο.
Όλα τα πράσινα σχήματα είναι ελλείψεις.
Μερικές από τις ελλείψεις είναι πράσινες.

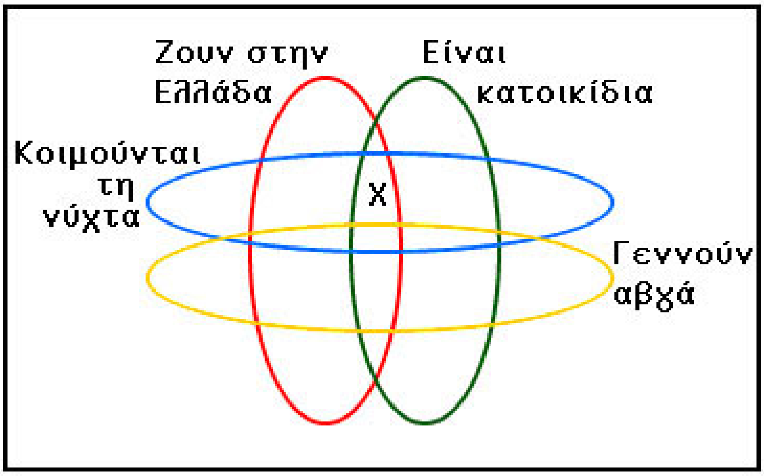
Φτιάξτε μερικές αληθινές προτάσεις.
Συζητήστε με τον δάσκαλό σας αν έχει νόημα να πείτε κάποια από τις παρακάτω προτάσεις:
Μερικά από τα τετράγωνα είναι κίτρινα.
Μερικά από τα εξάγωνα είναι μπλε.
Όλοι οι κύκλοι είναι κίτρινοι.

Βέβαια, είναι πιο φυσικό να πούμε «ένα από τα τετράγωνα είναι κίτρινο», «όλα τα εξάγωνα είναι μπλε» και «ο κύκλος είναι κίτρινος». Αλλά, το αν οι τελευταίες τρεις προτάσεις στις παραπάνω ερωτήσεις είναι αποδεκτές ή όχι, αυτό εξαρτάται από τη σημασία που δίνουμε στις λέξεις «μερικά» και «όλα». Θα αποδειχτεί αργότερα πως είναι βολικό να μπορούμε να λέμε «όλα τα στοιχεία» ενός συνόλου κι όταν το σύνολο έχει μόνο ένα στοιχείο (στην πραγματικότητα, ακόμη κι όταν δεν έχει κανένα) και με το «μερικά» να εννοούμε «τουλάχιστον ένα και ίσως όλα». Με αυτή την έννοια και οι τρεις προτάσεις είναι παραδεκτές. Αλλά είναι πιο σημαντικό για τα παιδιά, σε αυτό το στάδιο, να αισθανθούν κάποια αμφιβολία για τον τρόπο που χρησιμοποιούν αυτές τις λέξεις, ώστε να τις χρησιμοποιήσουν μετά προσεκτικά, παρά να υιοθετήσουν κάτι επειδή τους φαίνεται παράξενο.

Για τα προηγούμενα παραδείγματα τα παιδιά χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν δύο κορδόνια. Ανάλογη εργασία μπορεί να γίνει και με τρία κορδόνια. Αλλά, καθώς ο αριθμός των χαρακτηριστικών αυξάνει, νέες μέθοδοι ταξινόμησης χρειάζονται. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως έχουμε το σύνολο των ζώων: {αγελάδα, σκύλος, τίγρη, νυφίτσα, κότα, νυχτερίδα, αετός, κροκόδειλος, ασβός}. Αυτό το σύνολο μπορεί να διαμεριστεί με πολλούς τρόπους, π.χ. εκείνα που είναι κατοικίδια και εκείνα που δεν είναι, εκείνα που κοιμούνται την ημέρα και εκείνα που κοιμούνται τη νύχτα, εκείνα που ζουν στην Ελλάδα και εκείνα που βρίσκονται στην Ελλάδα μόνο σε ζωολογικούς κήπους κλπ. Τα Βένια διαγράμματα είναι βολικά όταν αναφερόμαστε σε δύο ή τρία χαρακτηριστικά. Αλλά με περισσότερα από τρία χαρακτηριστικά τα διαγράμματα αυτά γίνονται μάλλον πολύπλοκα:



I



II

Στην πρώτη εικόνα, το **X** υποδηλώνει ένα ζώο που ζει στην Ελλάδα και κοιμάται τη νύχτα, αλλά δεν είναι κατοικίδιο (π.χ. αετός). Στη δεύτερη εικόνα, το **X** υποδηλώνει ένα ζώο που ζει στην Ελλάδα, είναι κατοικίδιο, κοιμάται τη νύχτα, αλλά δεν γεννά αβγά (π.χ. σκύλος).

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, πολύ ικανοποιητικά, την παρακάτω μέθοδο (στην επόμενη σελίδα) για να ξεχωρίσουμε τα υποσύνολα των ζώων με κοινά χαρακτηριστικά, ιδιαίτερα όταν αυτά τα χαρακτηριστικά είναι πολυάριθμα:

	Ζει στην Ελλάδα	Είναι κατοικίδιο	Κοιμάται τη νύχτα	Γεννά αβγά	Έχει φτερά
αγελάδα	X	X	X		
σκύλος	X	X	X		
τίγρη			X		
νυφίτσα	X		X		
κότα	X	X	X	X	X
νυχτερίδα	X				X
αετός	X		X	X	X
κροκόδειλος			X	X	
ασβός	X				

Από τον παραπάνω πίνακα γίνεται φανερό πως, μέσα στο δοσμένο σύνολο των ζώων, το υποσύνολο εκείνων που γεννούν αβγά, κοιμούνται τη νύχτα και δεν είναι κατοικίδια έχει δύο στοιχεία, τον αετό και τον κροκόδειλο.

Ένας άλλος τρόπος για να ξεχωρίσουμε υποσύνολα με κοινά χαρακτηριστικά είναι με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού. Αν ένα φύλλο από διαφανές χαρτί τοποθετηθεί πάνω σε έναν πίνακα με τα ονόματα (ή τις εικόνες) των στοιχείων του συνόλου, μπορεί να μπουν σημάδια πάνω στο διαφανές χαρτί που να υποδηλώνουν ειδικά χαρακτηριστικά χωρίς να καταστραφεί ο πίνακας. Στο προηγούμενο παράδειγμα, τα εννιά ζώα θα μπορούσαν να παρασταθούν σε έναν τετράγωνο πίνακα (3x3). Κι αν βάλουμε π.χ. ένα X στο διαφανές χαρτί για να δείξουμε ποια ζώα έχουν φτερά και έναν κύκλο για να δείξουμε ποια κοιμούνται τη μέρα, θα φανεί καθαρά πως η νυχτερίδα (και μόνο η νυχτερίδα μεταξύ των ζώων του δοσμένου συνόλου) έχει φτερά και κοιμάται τη μέρα:

αγελάδα	σκύλος	τίγρη
νυφίτσα	X κότα	X O νυχτερίδα
X αετός	κροκόδειλος	ασβός

Ένα άλλο παράδειγμα συνόλου, που μπορεί να διαμεριστεί με διάφορους τρόπους, είναι το: {τρένο, αεροπλάνο, κουνιστό αλογάκι, λουλούδι, ψάρι, άνθρωπος, πεταλούδα, πιγκουίνος, πάπια}. Κατάλληλα χαρακτηριστικά είναι π.χ. ζει, έχει πόδια, έχει ουρά, πετάει κλπ.

Τα γεωμετρικά σχήματα είναι πιο βολικά γι' αυτές τις δραστηριότητες γιατί, ανάμεσα σε άλλους λόγους, μπορεί εύκολα να αυξηθεί ο αριθμός των διαφορετικών ιδιοτήτων τους. Σαν παράδειγμα θα αναφέρουμε μερικά από τα «παιχνίδια» που μπορούν να παίξουν τα παιδιά με ένα σύνολο που αποτελείται από 12 τρίγωνα, 12 τετράγωνα, 12 ορθογώνια παραλληλόγραμμα και 12 κύκλους. Από τα 12 τρίγωνα, τα 6 είναι μεγάλα και τα 6 είναι μικρά. Από τα 6 μεγάλα (ή τα 6 μικρά) τρίγωνα, τα 3 έχουν μικρό πάχος και τα 3 έχουν μεγαλύτερο πάχος. Τέλος, καθεμιά από τις έτσι φτιαγμένες ομάδες των 3 τριγώνων αποτελείται από ένα κόκκινο, ένα μπλε κι ένα κίτρινο τρίγωνο. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει ένα μεγάλο παχύ κόκκινο τρίγωνο, ένα μικρό παχύ κόκκινο τρίγωνο, ένα μεγάλο λεπτό κόκκινο τρίγωνο κλπ. Τα ίδια συμβαίνουν και στα άλλα γεωμετρικά σχήματα. Καθένα από τα 48 κομμάτια μπορεί να περιγραφεί (και να καθοριστεί) με τέσσερις λέξεις. Τα σχήματα αυτά μπορούν να γίνουν από χαρτόνι. Για να φτιάξουμε τα παχιά σχήματα μπορούμε να κολλήσουμε μεταξύ τους δύο κομμάτια χαρτόνι.

Φυσικά, είναι απαραίτητο τα παιδιά να έχουν πρώτα την ευκαιρία να παίξουν ελεύθερα με αυτά τα σχήματα για να εξοικειωθούν μαζί τους. Έπειτα μπορούν να παίξουν τα παρακάτω παιχνίδια:

1. Το παιχνίδι της «μιας διαφοράς». Ένα παιδί βάζει κάτω ένα οποιοδήποτε κομμάτι από το σύνολο των σχημάτων. Το επόμενο παιδί βάζει ένα κομμάτι που διαφέρει από το πρώτο μόνο σε *μια ιδιότητα*. Έτσι, αν το πρώτο κομμάτι ήταν ένα μεγάλο παχύ κόκκινο τετράγωνο, το δεύτερο θα μπορούσε να είναι ένα *μικρό* παχύ κόκκινο τετράγωνο ή ένα μεγάλο *λεπτό* κόκκινο τετράγωνο ή ένα μεγάλο παχύ *κίτρινο* τετράγωνο ή ένα μεγάλο παχύ κόκκινο *τρίγωνο* κλπ. Κάθε παιδί βάζει με τη σειρά του ένα κομμάτι που έχει μόνο μία διαφορά από το αμέσως προηγούμενο. Όταν ένα παιδί κάνει ένα λάθος χάνει ένα βαθμό. Το παιδί που στο τέλος του παιχνιδιού (όταν τελειώσουν όλα τα σχήματα ή το παιχνίδι φτάσει σε αδιέξοδο) έχει χάσει τους λιγότερους βαθμούς είναι ο νικητής.

Το παιχνίδι μπορεί να γίνει πιο πολύπλοκο αν αντικατασταθεί η μία διαφορά από δύο, τρεις ή τέσσερις διαφορές.

2. Το παιχνίδι «τι λείπει;». Παίζεται από δύο ομάδες παιδιών, η καθεμία από τις οποίες παίρνει (στην τύχη) τα μισά κομμάτια. Τα κομμάτια της μιας ομάδας κρύβονται από την άλλη. Κάθε ομάδα, με τη σειρά της, ζητά από την άλλη ένα κομμάτι, που πιστεύει πως το έχει η άλλη ομάδα, αναφέροντας τις τέσσερις χαρακτηριστικές ιδιότητες του κομματιού. Αν το κομμάτι αυτό ανήκει πραγματικά στην άλλη ομάδα, το βγάζουν από το παιχνίδι (τοποθετώντας το σε κάποιο μέρος έτσι που να το βλέπουν και οι δύο ομάδες). Χάνει η ομάδα που θα της τελειώσουν νωρίτερα όλα τα κομμάτια της.

Ένα άλλο παιχνίδι του ίδιου είδους μπορεί να παιχτεί από μια μικρή ομάδα παιδιών. Ένα παιδί κρύβει ένα (ή περισσότερα ή και κανένα) από τα κομμάτια και τα άλλα παιδιά προσπαθούν να βρουν ποιο είναι, παρατηρώντας ή ταξινομώντας αυτά που έμειναν.

Τέτοια παιχνίδια βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών της άρνησης και της αντιστροφής: αυτό που δεν είναι εδώ πρέπει να είναι εκεί κι αυτό που είναι εδώ δεν μπορεί να είναι εκεί.

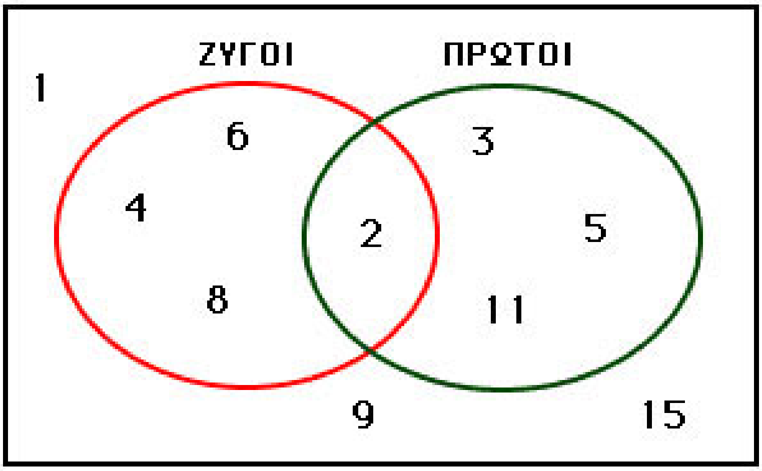
3. Το παιχνίδι των «είκοσι ερωτήσεων». Ένα παιδί βάζει με το μυαλό του ένα κομμάτι και τα άλλα παιδιά προσπαθούν να βρουν ποιο είναι, κάνοντας ερωτήσεις, στις οποίες οι απαντήσεις είναι μόνο «ναι» ή «όχι». Είναι σημαντικό να αφήσουμε τα παιδιά να ανακαλύψουν μόνα τους τον τρόπο που θα βοηθήσει να γίνουν πιο αποδοτικές οι ερωτήσεις τους. Οι απαντήσεις μπορούν να επαναλαμβάνονται και να ενθαρρύνονται τα παιδιά για να βγάζουν συμπεράσματα από αυτές. Έτσι, αν ένα κομμάτι δεν είναι παχύ (γιατί η απάντηση στην ερώτηση «είναι παχύ;» ήταν «όχι»), τα περισσότερα παιδιά θα πουν αμέσως πως πρέπει να είναι λεπτό κι έτσι δεν χρειάζεται να «σπαταλήσουν» την ερώτηση «είναι λεπτό;». Κι αν δεν είναι μπλε και δεν είναι κίτρινο, αρκετά παιδιά θα πουν αμέσως πως «άρα πρέπει να είναι κόκκινο».

4. Παιχνίδια με Βένια διαγράμματα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο ή τρία περιγράμματα από χοντρό σπάγκο, που το καθένα να αντιστοιχεί σε μια από τις τέσσερις ιδιότητες των κομματιών. Κάθε κομμάτι πρέπει να τοποθετηθεί μέσα στο σωστό περίγραμμα (ή στα σωστά περιγράμματα). Σημειώνεται ένας βαθμός για καθεμιά σωστή τοποθέτηση ή επιτυχημένη αναγνώριση ενός λάθους του αντιπάλου.

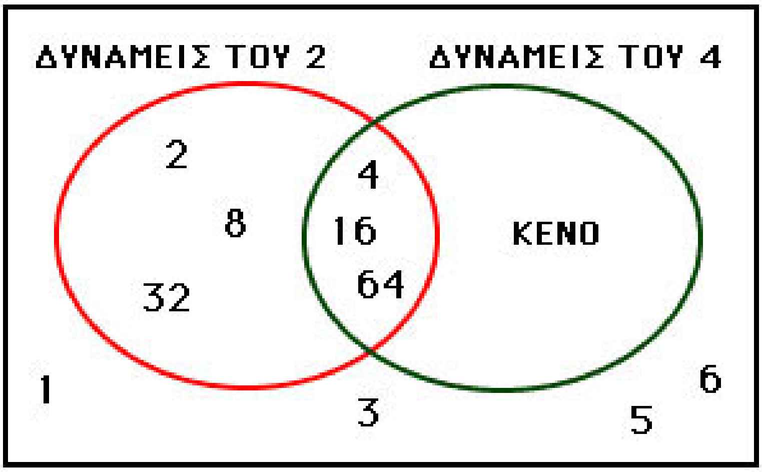
Σε ένα επόμενο στάδιο μπορούμε να προχωρήσουμε στην ταξινόμηση των αριθμών. Βένια διαγράμματα με δύο περιγράμματα είναι κατάλληλα για τη διαλογή των φυσικών αριθμών με τη χρησιμοποίηση ζευγαριών από χαρακτηριστικά, όπως τα παρακάτω:

Μονός, ζυγός
Ζυγός, πρώτος αριθμός
Μεγαλύτερος από το 10, μικρότερος από το 20
Μεγαλύτερος από το 20, μικρότερος από το 10
Μεγαλύτερος από το 20, μεγαλύτερος από το 10
Διαιρέτης του 36, διαιρέτης του 48
Διαιρέτης του 15, διαιρέτης του 45
Πολλαπλάσιο του 3, πολλαπλάσιο του 4
Πολλαπλάσιο του 3, πολλαπλάσιο του 6
Δύναμη του 2, δύναμη του 3
Δύναμη του 2, δύναμη του 4

Όπως αναφέραμε προηγούμενα, δύο χαρακτηριστικά θα διαμερίσουν το σύνολο των φυσικών αριθμών σε 4 ξένα μεταξύ τους σύνολα, μερικά από τα οποία μπορεί να είναι κενά. Τα παραπάνω παραδείγματα επιτρέπουν να παρουσιαστούν διάφορες δυνατότητες, όπως π.χ.:



I

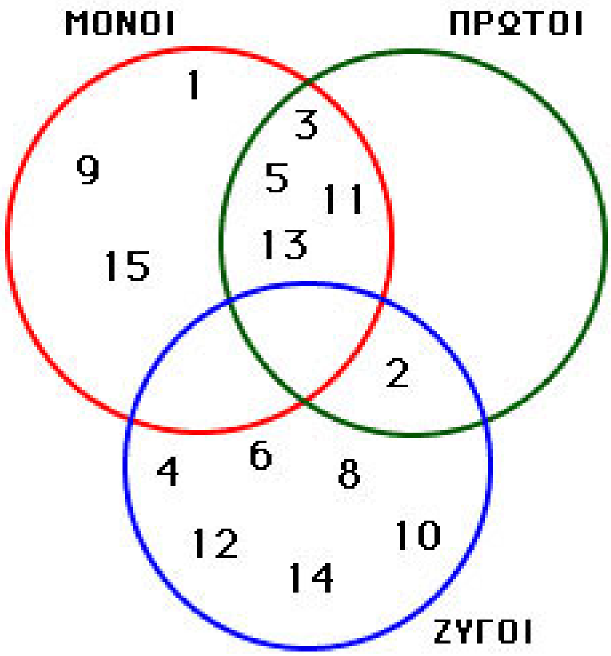


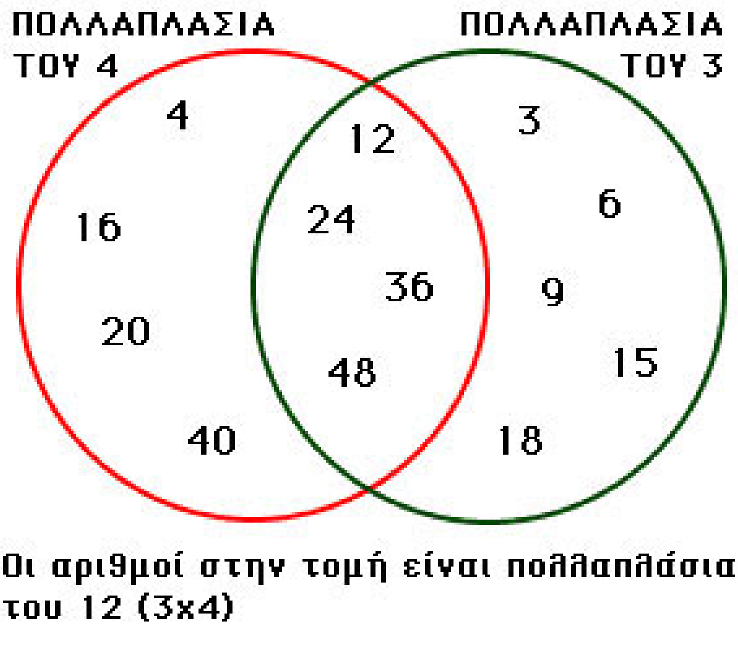
II

Η εργασία αυτού του είδους θα προκαλέσει πολλές ερωτήσεις, μερικές καθαρά αριθμητικές, μερικές λογικές, και θα οδηγήσει σε μια μεγαλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών – όπως η ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων οδηγεί σε μεγαλύτερη κατανόηση της γεωμετρίας.

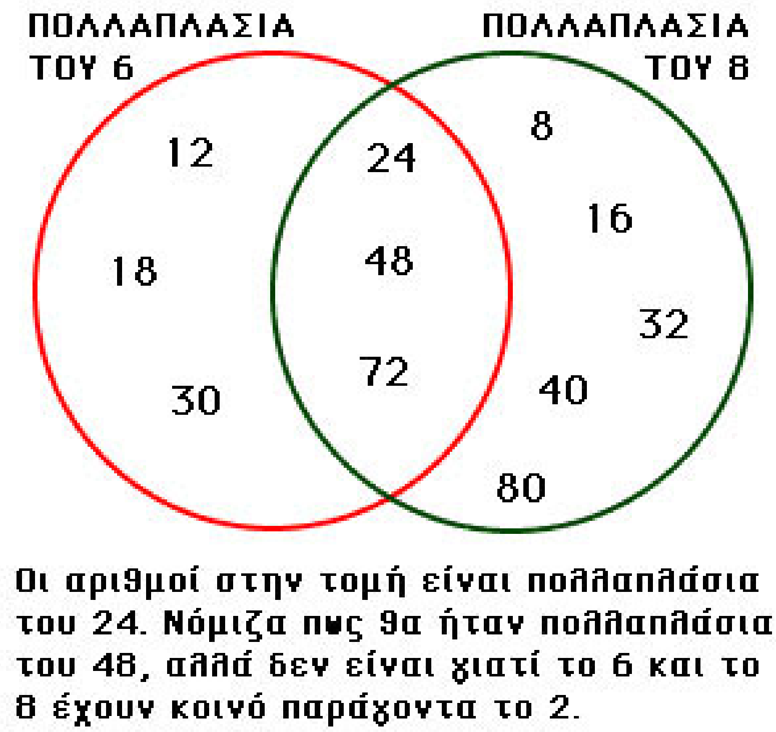
Όπως και στην ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων, έτσι κι εδώ θα εμφανιστούν σημασιολογικά προβλήματα καθώς και προβλήματα καθορισμού των όρων. Για παράδειγμα, αν ο αριθμός 1 είναι ή όχι σωστά τοποθετημένος στα προηγούμενα δύο διαγράμματα εξαρτάται από τον ορισμό των λέξεων «πρώτος αριθμός» και «δύναμη». Ο πιο συνηθισμένος ορισμός είναι αυτός που λέει πως ένας φυσικός αριθμός (εκτός του αριθμού 1) είναι πρώτος όταν δεν διαιρείται παρά μόνο από τον εαυτό του και το 1. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, ο αριθμός 1 είναι σωστά τοποθετημένος στο διάγραμμα Ι. Επίσης, ο αριθμός 1 είναι σωστά τοποθετημένος στο διάγραμμα ΙΙ αν δεχτούμε πως οι δυνάμεις του 2 είναι οι αριθμοί 2, 4, 8, 16, ... και σ' αυτό το στάδιο ο ορισμός αυτός είναι ικανοποιητικός. (Αργότερα θα μάθουμε πως $2^0=1$). Ένα κενό σύνολο εμφανίζεται στο διάγραμμα ΙΙ, γιατί δεν υπάρχουν δυνάμεις του 4 που δεν είναι και δυνάμεις του 2.

Χρειάζεται να συζητηθούν, επίσης, οι τεχνικοί όροι που αναφέρθηκαν προηγούμενα. Ανάμεσα στους παράγοντες (ή διαιρέτες) ενός φυσικού αριθμού συνηθίζουμε να περιλαμβάνουμε το 1 και τον ίδιο τον αριθμό. Έτσι 1, 2, 5, 10 είναι οι παράγοντες του 10. Ένας αριθμός διαιρείται από έναν άλλο αν ο δεύτερος αριθμός είναι παράγοντας του πρώτου. Αν ένας αριθμός διαιρείται από έναν άλλο ονομάζεται πολλαπλάσιο του δεύτερου (κι έτσι ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του). Τα πολλαπλάσια ενός αριθμού σχηματίζονται αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον αριθμό με τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, πολλαπλάσια του 20 είναι οι αριθμοί 20, 40, 60, 80, 100, 1000. Δεν υπάρχει κανένα όριο στο πλήθος των πολλαπλασίων ενός αριθμού, αλλά το πλήθος των παραγόντων του είναι περιορισμένο. Οι πρώτοι αριθμοί έχουν μόνο δύο παράγοντες: τον εαυτό τους και το 1.





Οι αριθμοί στην τομή είναι πολλαπλάσια του 12 (3x4)



Μια άλλη ανάγκη που θα εμφανιστεί μέσα από αυτή την εργασία είναι ο καθορισμός του «συνόλου αναφοράς», δηλαδή του συνόλου που περιέχει όλα τα αντικείμενα που θεωρούμε μια δεδομένη στιγμή. Στα προηγούμενα είχαμε χρησιμοποιήσει ως σύνολο αναφοράς το σύνολο των φυσικών αριθμών. Έτσι δεν τοποθετήσαμε το -2 ή το 3,4 στους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 10. Το γεγονός πως οι φυσικοί αριθμοί έχουν άπειρο πλήθος κάνει να εμφανίζονται ενδιαφέρουσες ερωτήσεις. Προφανώς, δεν είναι πρακτικά δυνατό να γραφούν όλα τα στοιχεία του συνόλου αναφοράς πάνω στο διάγραμμα – τουλάχιστον ένα από τα 4 σύνολα που σχηματίζονται θα έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Σε όλα τα παραδείγματα που έχουν δοθεί παραπάνω, μπορεί να συζητηθεί αν όλα τα στοιχεία ενός από τα σύνολα έχουν σημειωθεί πάνω στο διάγραμμα ή υπονοούνται.

Στα περισσότερα παραδείγματα είναι χρήσιμο να προσέξουμε την τομή των δύο συνόλων που καθορίζονται από το ζευγάρι των χαρακτηριστικών. Στις πιο πολλές περιπτώσεις τα παιδιά θα μπορούν να βρουν έναν απλό ορισμό γι' αυτή την τομή. Για παράδειγμα, η τομή του συνόλου των αριθμών που διαιρούνται με το 3 και του συνόλου των αριθμών που διαιρούνται με το 4 είναι το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται με το 12. Τα παιδιά θα μπορούσαν από αυτό να φτάσουν στο λαθεμένο συμπέρασμα πως η τομή του συνόλου των αριθμών που διαιρούνται με το 6 και του συνόλου των αριθμών που διαιρούνται με το 8 είναι το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται με το 48. Ξεκινώντας από ένα τέτοιο λάθος, θα μπορούσαμε να οδηγήσουμε τα παιδιά στις έννοιες του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου και του μέγιστου κοινού διαιρέτη.

Σχετική εργασία θα μπορούσε να γίνει και με τη χρησιμοποίηση τριών χαρακτηριστικών, για παράδειγμα: παράγοντας του 12, παράγοντας του 16, παράγοντας του 18. Αλλά για την κατανόηση των βασικών εννοιών αρκεί η ταξινόμηση με βάση δύο μόνο χαρακτηριστικά.

ΠΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Η ΛΕΞΗ «ή»

Η τομή δύο συνόλων είναι το σύνολο των αντικειμένων που έχουν και τις ιδιότητες των στοιχείων του πρώτου συνόλου και τις ιδιότητες των στοιχείων του δεύτερου συνόλου. Μια εξίσου σημαντική έννοια είναι η έννοια της ένωσης των δύο συνόλων, η οποία είναι το σύνολο των αντικειμένων που έχουν τις ιδιότητες των στοιχείων του πρώτου συνόλου ή τις ιδιότητες των στοιχείων του δεύτερου συνόλου.

Χρειάζεται μια προσεκτική αντιμετώπιση της λέξης «ή», γιατί χρησιμοποιείται με δύο έννοιες, την έννοια του αποκλείεται και την έννοια του περιέχεται: Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του αποκλείεται, τότε «α ή β» σημαίνει «ένα και μόνο ένα από τα α, β». Αν χρησιμοποιηθεί με την έννοια του περιέχεται, τότε «α ή β» σημαίνει «τουλάχιστον ένα από τα α, β και ίσως και τα δύο». Στην καθημερινή ομιλία παρουσιάζονται και οι δύο έννοιες, αν και η έννοια του αποκλείεται είναι πιο συνηθισμένη*. Οι παρακάτω προτάσεις δείχνουν τις δύο αυτές χρήσεις και τα παιδιά θα μπορούσαν να συζητήσουν αυτά τα παραδείγματα ή άλλα παρόμοια:

1. *Δεν έχω αποφασίσει αν θα μείνω στο σπίτι ή θα βγω έξω το απόγευμα.*
2. *Μπορείς να πας εκεί με το τρένο ή με το λεωφορείο.*
3. *Δεν μπορώ να δουλέψω όταν είμαι κουρασμένος ή άρρωστος.*
4. *Μπορείς να κολυμπήσεις ή να παίξεις ποδόσφαιρο.*
5. *Δώσε μου ένα τετράγωνο ή τριγωνικό κομμάτι.*
6. *Δώσε μου ένα μπλε ή τριγωνικό κομμάτι.*

Είναι φανερό πως η λέξη «ή» χρησιμοποιείται με την έννοια του αποκλείεται σίγουρα στην πρώτη και μάλλον στη δεύτερη πρόταση. Αυτός που λέει την τρίτη πρόταση είναι πιθανό να σκέφτεται το «ή» με την έννοια του αποκλείεται, αλλά αν το καλοσκεφτεί θα δεχτεί την έννοια του περιέχεται. Στην τέταρτη πρόταση το «ή» μπορεί να χρησιμοποιείται είτε με την έννοια του αποκλείεται είτε με την έννοια του περιέχεται ανάλογα με τα συμφραζόμενα. Στην πέμπτη δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, αφού ένα κομμάτι δεν μπορεί να είναι και τετράγωνο και τριγωνικό, αλλά στην έκτη πρόταση υπάρχει μια πραγματική αβεβαιότητα.

Στην καθημερινή ομιλία οι αμφιβολίες αίρονται με τη γνώση των συμφραζομένων ή με τον τόνο της φωνής ή με την προσθήκη άλλων λέξεων. Στην πρόταση 2 μπορεί να μην ενδιέφερε καθόλου η έννοια του «ή», αλλά αν ήταν σημαντικό να έχει την έννοια του περιέχεται θα μπορούσε να προστεθεί η φράση «ή και με τα δύο». Κι αν ήταν σημαντικό να έχει την έννοια του αποκλείεται, η πληροφορία θα μπορούσε να δοθεί με κάποια πρόταση, όπως: «Μπορείς να πας μόνο με το τρένο ή μόνο με το λεωφορείο, αλλά δεν μπορείς να συνδυάσεις ένα ταξίδι με τρένο και λεωφορείο». Τα συμφραζόμενα θα μπορούσαν να διώξουν τις αμφιβολίες για τη σημασία της τέταρτης πρότασης. Αλλιώς θα λέγαμε: «Μπορείς ή να κολυμπήσεις ή να παίξεις ποδόσφαιρο, αλλά όχι και τα δύο» ή «Μπορείς να κολυμπήσεις και να παίξεις

---

* Στα αρχαία ελληνικά έχουμε δύο ειδών διαζευκτικούς συνδέσμους που αντιστοιχούν στις δύο αναφερόμενες έννοιες του «ή»: ή - ή και είτε - είτε. Η εννοιολογική αυτή διαφοροποίηση δεν υπάρχει, όμως, στη νέα ελληνική γλώσσα (τουλάχιστο στο βαθμό που θα μας επέτρεπε να τη χρησιμοποιήσουμε στη συζήτησή μας με τα παιδιά).
Στην αγγλική γλώσσα υπάρχει μια ανάλογη διπλή έννοια της λέξης or. Πολλοί συγγραφείς, προσπαθώντας να είναι πιο σαφείς, χρησιμοποιούν τη λέξη or με την έννοια του αποκλείεται και την έκφραση and/or με την έννοια του περιέχεται.

ποδόσφαιρο» (η τελευταία φράση σημαίνει πως μπορείς να κάνεις είτε και τα δύο είτε μόνο το ένα).

Τέλος, το «ή» μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με ερωτήσεις. Η ερώτηση «Θέλεις τσάι ή καφέ;» περιμένει συνήθως για απάντηση «τσάι», «καφέ» ή ίσως «και τα δύο». Αλλά μπορεί επίσης να περιμένει σαν απάντηση ένα «ναι» ή ένα «όχι».

Είναι μια πολύ χρήσιμη άσκηση για τα παιδιά να φτιάχνουν δικές τους προτάσεις που να περιέχουν τη λέξη «ή», να βλέπουν πώς οι άλλοι τις αντιλαμβάνονται και να τις διορθώνουν αν υπάρχει κάποια αμφιβολία. Σε αυτό το στάδιο, είναι προτιμότερο για τα παιδιά να αποσαφηνίζουν το νόημα που θέλουν να δώσουν, με την προσθήκη φράσεων όπως «ή και τα δύο», «αλλά όχι και τα δύο», παρά να υιοθετήσουν μια πάγια έννοια της λέξης «ή». (Μολονότι, σε ένα κατοπινό στάδιο, στα Μαθηματικά, θα μάθουν να δίνουν πάντα στο «ή» την έννοια του περιέχεται).

ΛΟΓΙΚΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ

Λογικός συλλογισμός είναι μια λογική διαδικασία με την οποία, ξεκινώντας από μία ή περισσότερες αρχικές προτάσεις (που ονομάζονται «κρίσεις» ή «υποθέσεις»), οδηγούμαστε σε ένα ή περισσότερα συμπεράσματα. Η ορθότητα του συλλογισμού είναι εντελώς ανεξάρτητη από το αν οι υποθέσεις είναι στην πραγματικότητα σωστές ή όχι. Αν είναι σωστές, ο συλλογισμός οδηγεί φυσικά σε ένα σωστό συμπέρασμα. Συνήθως, βέβαια, ξεκινούμε από υποθέσεις που τουλάχιστο πιστεύουμε πως είναι σωστές. Αρκετά συχνά, όμως, αρχίζουμε και με υποθέσεις που δεν ξέρουμε αν είναι σωστές και διερευνούμε τις συνέπειες της πιθανής ορθότητάς τους. Φυσικά, τα παιδιά πολύ αργότερα θα προσεγγίσουν αυτή τη γενική θεώρηση. Σε αυτό το στάδιο ενδιαφερόμαστε μόνο να βοηθήσουμε στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης των παιδιών. Αλλά οι δάσκαλοι θα πρέπει πάντα να θυμούνται αυτή τη διάκριση ανάμεσα στην ορθότητα του συλλογισμού και στην αλήθεια των συμπερασμάτων.

Ένα κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων που παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες είναι πως οι συλλογισμοί στηρίζονται σε πληροφορίες που δίνονται στο παιδί και όχι σε πραγματικά δεδομένα που τα έχει ανακαλύψει μόνο του. Αυτό, όμως, αποτελεί ένα βασικό στάδιο στην καλλιέργεια της σκέψης του παιδιού. Στα προβλήματα που ακολουθούν, όπως και σε όλη τη μέχρι τώρα εργασία, παρατηρούμε πως οι λέξεις **και**, **ή**, **δεν**, **μερικά**, **όλα**, **κανένα** έχουν πρωταρχική σημασία και μερικές φορές απαιτούν ιδιαίτερη συζήτηση. Επίσης, η λέξη **αν** είναι πολύ σημαντική, αλλά εδώ χρησιμοποιείται μόνο περιστασιακά και δεν πρόκειται να δημιουργήσει προβλήματα. Αντιμετωπίζεται αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Ο Μιχάλης λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 23 ή στις 24 Ιουλίου.
Η Καίτη λέει πως τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 22 ή στις 23 Ιουλίου.
Πότε είναι τα γενέθλια του Τάκη αν έχουν και οι δύο δίκιο; Πότε είναι αν ο Μιχάλης έχει δίκιο και η Καίτη κάνει λάθος; Τι μπορείς να πεις αν και οι δυο τους κάνουν λάθος;

Τα γενέθλια του Τάκη είναι στις 23 Ιουλίου αν έχουν και οι δύο δίκιο. Είναι στις 24 αν ο Μιχάλης έχει δίκιο και η Καίτη κάνει λάθος. Αν και οι δυο τους κάνουν λάθος, το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι πως ο Τάκης δεν έχει γενέθλια ούτε στις 22, ούτε στις 23, ούτε στις 24 Ιουλίου.

Η Μαίρη λέει πως τα Χριστούγεννα πριν δύο χρόνια έπεφταν Δευτέρα ή Τρίτη.
Ο Νίκος λέει πως έπεφταν Τρίτη ή Πέμπτη.
Η Κική λέει πως δεν έπεφταν Τρίτη.
Πότε έπεφταν αν η Κική κάνει λάθος;
Πότε έπεφταν αν η Μαίρη και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο;
Πότε έπεφταν αν ο Νίκος και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο;
Θα μπορούσαν να έχουν και οι τρεις τους δίκιο;
Θα μπορούσαν να κάνουν και οι τρεις τους λάθος;

Αν η Κική κάνει λάθος, τα Χριστούγεννα πριν δύο χρόνια έπεφταν Τρίτη.
Αν η Μαίρη και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο έπεφταν Δευτέρα.
Αν ο Νίκος και η Κική έχουν και οι δυο τους δίκιο έπεφταν Πέμπτη.
Δεν θα μπορούσαν να έχουν και οι τρεις τους δίκιο.

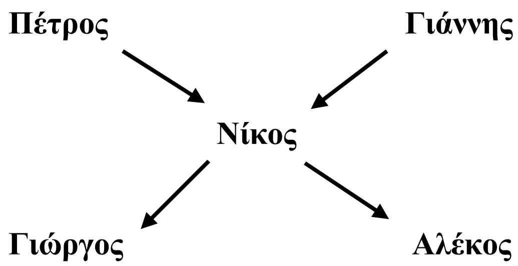
Δεν θα μπορούσαν να κάνουν και οι τρεις τους λάθος, γιατί αν η Κική κάνει λάθος τότε η Μαίρη και ο Νίκος έχουν και οι δυο τους δίκιο.

Η λύση των παραπάνω προβλημάτων δεν απαιτεί καμιά ιδιαίτερη γνώση πέρα από τον λογικό συλλογισμό. Το επόμενο όμως πρόβλημα, αν και είναι βασικά πρόβλημα λογικής, για να λυθεί απαιτεί την εφαρμογή της μεταβατικής ιδιότητας στη σχέση «μεγαλύτερο από». Η ιδιότητα αυτή λέει πως αν «α μεγαλύτερο από β» και «β μεγαλύτερο από γ» τότε «α μεγαλύτερο από γ».

Ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τον Νίκο.
Ο Νίκος είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο και τον Αλέκο και μικρότερος από τον Γιάννη.
Μπορείς να πεις ποιο αγόρι είναι το μεγαλύτερο σε καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια; Πέτρος - Αλέκος, Γιώργος - Αλέκος, Γιώργος - Γιάννης. Μπορείς να βρεις ένα άλλο ζευγάρι, στο οποίο να μην μπορείς να πεις ποιο αγόρι είναι μεγαλύτερο;

Ο Πέτρος είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο.
Δεν μπορούμε να πούμε ποιος είναι μεγαλύτερος ανάμεσα στον Γιώργο και στον Αλέκο.
Ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τον Γιώργο.
Δεν μπορούμε να πούμε ποιος είναι μεγαλύτερος ανάμεσα στον Πέτρο και στον Γιάννη.

Αν σχεδιάσουμε ένα διάγραμμα, στο οποίο μια γραμμή που ενώνει το Α με το Β με ένα βέλος που δείχνει από το Α προς το Β σημαίνει πως το Α είναι μεγαλύτερο από το Β, οι πληροφορίες που δίνονται στο πρόβλημα μπορούν να παρασταθούν έτσι:
(Ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τον Νίκο, γιατί ο Νίκος είναι μικρότερος από τον Γιάννη)



Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις μπορούν να είναι τώρα άμεσες. Ας σημειωθεί πως ο Πέτρος και ο Γιάννης είναι και οι δύο μεγαλύτεροι από τον Γιώργο και τον Αλέκο γιατί η σχέση «μεγαλύτερος από» είναι μεταβατική. Στο διάγραμμα θα μπορούσαν να προστεθούν βέλη από τους Πέτρο και Γιάννη προς τους Γιώργο και Αλέκο.

Προβλήματα όπως τα επόμενα μπορούν να παρουσιαστούν σαν παιχνίδια για μια ομάδα παιδιών ή και για ολόκληρη την τάξη.

Ο Γιάννης σκέφτεται έναν αριθμό και λέει πως είναι μεγαλύτερος από το 3, είναι μονός αριθμός και είναι παράγοντας του 36. Μπορείς να βρεις ποιος αριθμός είναι;

Οι παράγοντες του 36 είναι 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Ο μοναδικός μονός αριθμός μεγαλύτερος από το 3 είναι το 9.

Ο Πέτρος σκέφτεται ένα γράμμα και λέει πως βρίσκεται στις λέξεις «νερό» και «ντροπή», αλλά δεν βρίσκεται στις λέξεις «αέρας» και «δρόμος». Μπορείς να βρεις ποιο γράμμα είναι; Ήταν απαραίτητο να πει ο Πέτρος πως το γράμμα δεν βρίσκεται στη λέξη αέρας;

Το γράμμα που ο Πέτρος σκέφτηκε είναι το «ν». Μπορεί να καθοριστεί και χωρίς την πληροφορία πως δεν βρίσκεται στη λέξη «αέρας».

Σκέψου έναν αριθμό ή ένα γράμμα και πες σε ένα φίλο σου μερικά στοιχεία, ώστε να ανακαλύψει τι σκέφτηκες. Βεβαιώσου πως τα στοιχεία που του δίνεις είναι αρκετά.

Τα παρακάτω προβλήματα περιέχουν μία ή περισσότερες από τις λέξεις **μερικά**, **όλα**, **κανένα** (ή παρόμοιες λέξεις όπως **κάποιος**, **καθένας** κλπ.) και γενικά είναι πιο δύσκολα από τα προηγούμενα.

Στην τάξη της Κατερίνας και του Κώστα, σε καθέναν αρέσει να σχεδιάζει ή να μπογιατίζει ή και τα δύο. Της Κατερίνας δεν της αρέσει να μπογιατίζει.
Ποια από τα παρακάτω μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως είναι αληθινά;
***1**. Στην Κατερίνα αρέσει να σχεδιάζει.*
***2**. Στον Κώστα αρέσει και να σχεδιάζει και να μπογιατίζει.*
***3**. Σε κάθε παιδί της τάξης που δεν αρέσει να σχεδιάζει, του αρέσει να μπογιατίζει.*
***4**. Σε κανένα παιδί της τάξης δεν αρέσει να μπογιατίζει.*
***5**. Στον Κώστα δεν αρέσει ούτε να σχεδιάζει ούτε να μπογιατίζει.*
Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις θα μπορούσε να είναι αληθινές;
Ποιες δεν θα μπορούσε να είναι αληθινές;

1. Σίγουρα αληθινό.
2. Ίσως αληθινό.
3. Σίγουρα αληθινό.
4. Ίσως αληθινό (μολονότι αν είναι αληθινό, η αρχική πρόταση είναι περιττή).
5. Σίγουρα λάθος.

Στην τάξη του Νίκου και του Γιώργου, κάθε παιδί που πηγαίνει στο σχολείο με τα πόδια μένει εκεί και για φαγητό.
Ο Νίκος πηγαίνει στο σχολείο με τα πόδια. Ο Γιώργος τρώει στο σχολείο.
Μπορείς να πεις αν ο Νίκος τρώει στο σχολείο κι αν ο Γιώργος πηγαίνει με τα πόδια;
Μπορείς να είσαι σίγουρος πως κάθε παιδί που τρώει στο σχολείο πηγαίνει εκεί με τα πόδια; Θα μπορούσε να είναι αλήθεια πως κάθε παιδί που τρώει στο σχολείο πηγαίνει εκεί με τα πόδια; Η Μαρία δεν τρώει στο σχολείο. Τι μπορείς να πεις για το πώς πηγαίνει στο σχολείο; Η Ελένη δεν πηγαίνει με τα πόδια στο σχολείο. Μπορείς να πεις αν τρώει ή όχι στο σχολείο;

Ο Νίκος τρώει στο σχολείο. Ο Γιώργος ίσως να πηγαίνει με τα πόδια στο σχολείο, ίσως και όχι.
Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι αν κάθε παιδί που τρώει στο σχολείο πηγαίνει στο σχολείο με τα πόδια, αλλά θα μπορούσε να συμβαίνει αυτό.

4 παιδιά μιας οικογένειας (που έχει 5 παιδιά) είναι ξανθά και 3 από τα παιδιά αυτής της οικογένειας είναι αγόρια. Μπορείς να πεις αν όλα τα αγόρια έχουν ξανθά μαλλιά και αν τουλάχιστον ένα από τα κορίτσια έχει ξανθά μαλλιά;

Το τελευταίο πρόβλημα εισάγει ένα αριθμητικό στοιχείο, το οποίο πάντως μπορεί να αντιμετωπιστεί χωρίς καμιά ιδιαίτερη δυσκολία. Υπάρχουν δύο κορίτσια στην οικογένεια και οι μόνες δυνατότητες για τα ξανθά παιδιά είναι να αποτελούνται ή από 3 αγόρια και 1 κορίτσι ή από 2 αγόρια και 2 κορίτσια. Έτσι, δεν μπορούμε να πούμε αν όλα τα αγόρια έχουν ξανθά μαλλιά, αλλά μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως τουλάχιστον ένα κορίτσι έχει ξανθά μαλλιά.

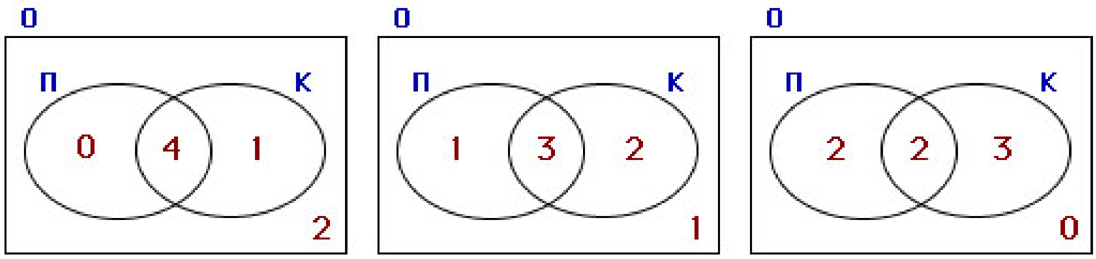
Το επόμενο πρόβλημα είναι μάλλον πιο πολύπλοκο κι έτσι είναι απαραίτητο να καταγραφούν συστηματικά όλες οι δυνατότητες, τουλάχιστο για να απαντήσουμε σε μερικές από τις ερωτήσεις.

Ο Αλέκος είναι ένα από τα 7 παιδιά μιας οικογένειας. Όλα τους ξέρουν να οδηγούν ποδήλατο, 5 ξέρουν να κολυμπούν και 4 ξέρουν να παίζουν πιάνο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις πρέπει / θα μπορούσε / δεν θα μπορούσε να είναι αληθινές;
1*. Ο Αλέκος ξέρει να οδηγεί ποδήλατο.*
2*. Ο Αλέκος ξέρει να παίζει πιάνο.*
3*. Όλα τα παιδιά που ξέρουν να παίζουν πιάνο ξέρουν επίσης να κολυμπούν.*
4*. Κάθε παιδί ξέρει ή να παίζει πιάνο ή να κολυμπά ή και τα δύο.*
5*. Κανένα από τα παιδιά που ξέρουν να παίζουν πιάνο δεν ξέρει και να κολυμπά.*
6*. Μερικά από τα παιδιά που ξέρουν να παίζουν πιάνο ξέρουν επίσης και να κολυμπούν.*
Τι μπορείς να πεις για τον αριθμό των παιδιών που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν; Η φράση «5 ξέρουν να κολυμπούν» σημαίνει πως 2 δεν ξέρουν ή θα μπορούσε να σημαίνει και κάτι διαφορετικό;

Είναι φανερό πως ο αριθμός των παιδιών που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν είναι το πολύ 4. Αν είναι 4, ο αριθμός των παιδιών που ξέρουν να παίζουν πιάνο αλλά όχι και να κολυμπούν είναι 0, ο αριθμός εκείνων που ξέρουν να κολυμπούν αλλά όχι και να παίζουν πιάνο είναι 1 και, αφού ο αριθμός όλων των παιδιών είναι 7, συμπεραίνουμε πως ο αριθμός των παιδιών που δεν ξέρουν ούτε να κολυμπούν ούτε να παίζουν πιάνο είναι 2. Αυτά τα νούμερα, όπως και όσα αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν	**4**	**3**	**2**
Αριθμός παιδιών που ξέρουν να παίζουν πιάνο αλλά δεν ξέρουν να κολυμπούν	**0**	**1**	**2**
Αριθμός παιδιών που ξέρουν να κολυμπούν αλλά δεν ξέρουν να παίζουν πιάνο	**1**	**2**	**3**
Αριθμός παιδιών που δεν ξέρουν ούτε να παίζουν πιάνο ούτε να κολυμπούν	**2**	**1**	**0**
ΣΥΝΟΛΟ	**7**	**7**	**7**

Έτσι, ο αριθμός των παιδιών που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν είναι 4, 3 ή 2. Δεν μπορεί να είναι μικρότερος από 2, γιατί τότε ο αριθμός των παιδιών που δεν ξέρουν ούτε να κολυμπούν ούτε να παίζουν πιάνο θα έπρεπε να είναι μικρότερος από το 0.
Ας σημειώσουμε πως τα 2 χαρακτηριστικά – ξέρουν να παίζουν πιάνο, ξέρουν να κολυμπούν – χωρίζουν το σύνολο των παιδιών σε 4 ξένα μεταξύ τους σύνολα (από τα οποία το ένα μπορεί να είναι κενό).
Οι αριθμοί του προηγούμενου πίνακα μπορούν να παρουσιαστούν και με τα παρακάτω διαγράμματα:



Σε αυτά τα διαγράμματα, τα σύνολα Ο, Π και Κ είναι αντίστοιχα: το σύνολο των παιδιών όλης της οικογένειας, το σύνολο των παιδιών που ξέρουν να παίζουν πιάνο και το σύνολο των παιδιών που ξέρουν να κολυμπούν.
Κάθε αριθμός φανερώνει τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου. Για παράδειγμα, στο πρώτο διάγραμμα, το 4 δηλώνει πως υπάρχουν 4 στοιχεία κοινά στα σύνολα Π και Κ, δηλαδή στην τομή των Π και Κ. Αυτά είναι τα 4 παιδιά που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν.

Έχουμε τώρα όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για να απαντήσουμε στις ερωτήσεις του προβλήματος. (Οι δύο πρώτες θα μπορούσε, βέβαια, να απαντηθούν αμέσως: Η πρόταση **1** είναι οπωσδήποτε αληθινή γιατί όλα τα παιδιά ξέρουν να οδηγούν ποδήλατο. Ενώ η πρόταση **2** θα μπορούσε να είναι αληθινή, αλλά δεν είναι υποχρεωτικά αληθινή, γιατί ο Αλέκος μπορεί να είναι ένα από τα 4 παιδιά που ξέρουν να παίζουν πιάνο αλλά μπορεί και να μην είναι.)

Η πρόταση **3** μπορεί να είναι αληθινή αλλά μπορεί και να μην είναι, γιατί ο αριθμός των παιδιών που ξέρουν και να παίζουν πιάνο και να κολυμπούν μπορεί να είναι 4 (δηλαδή «όλα») ή 3 ή 2.

Η πρόταση **4** μπορεί να είναι αληθινή αλλά μπορεί και όχι. Στο τρίτο διάγραμμα κάθε παιδί ξέρει να παίζει πιάνο ή να κολυμπά, αλλά στις άλλες περιπτώσεις υπάρχουν 1 ή 2 παιδιά που δεν ξέρουν ούτε να παίζουν πιάνο ούτε να κολυμπούν.

Η πρόταση **5** δεν μπορεί να είναι αληθινή, γιατί τουλάχιστο 2 από τα παιδιά που ξέρουν να παίζουν πιάνο ξέρουν επίσης και να κολυμπούν.

Το αν η πρόταση **6** είναι αληθινή ή όχι εξαρτάται από το πώς καταλαβαίνουμε τη λέξη **μερικά**. Αν **μερικά** σημαίνει «μερικά αλλά όχι όλα», η πρόταση **6** μπορεί να είναι αληθινή, μπορεί και να μην είναι. Αν όμως το **μερικά** δεν αποκλείει το **όλα**, τότε η πρόταση **6** είναι σίγουρα αληθινή.

Η τελική ερώτηση στο πρόβλημα αναφέρεται στη δυνατότητα να αντιληφθούμε την πρόταση «5 από τα παιδιά ξέρουν να κολυμπούν» σαν μια διατύπωση που δεν λέει τίποτα για τα υπόλοιπα 2 κι έτσι να τη θεωρήσουμε ισοδύναμη με την πρόταση «τουλάχιστον 5 από τα παιδιά ξέρουν να κολυμπούν». Αλλά στην καθημερινή ομιλία η πρώτη πρόταση είναι πιο φυσικό να σημαίνει «5 και μόνο 5 από τα παιδιά ξέρουν να κολυμπούν».

Η Μαίρη λέει: Ήμουν η πρώτη απ' όλα τα κορίτσια στο σημερινό διαγώνισμα στο σχολείο.
Θα είχε δίκιο ο αδελφός της Μαίρης να έλεγε πως, επομένως, δεν ήταν η πρώτη στην τάξη της;

Στην παραπάνω ερώτηση, η έκφραση «θα είχε δίκιο» σημαίνει βέβαια «θα ήταν λογικά σωστό». Στην πραγματικότητα, ο αδελφός της Μαίρης δεν θα είχε δίκιο γιατί, σε καθαρά λογικό επίπεδο, η δυνατότητα να ήταν η πρώτη στην τάξη της δεν αποκλειόταν από αυτό που είπε. Θα μπορούσαμε, βέβαια, να υποστηρίξουμε πως αν πραγματικά ήταν πρώτη στην τάξη της θα έλεγε οπωσδήποτε αυτό και όχι εκείνο που είπε. Αλλά είναι σημαντικό να δούμε πως αυτός ο «συλλογισμός» περιέχει μια παραδοχή και δεν είναι ένας λογικός συλλογισμός που ξεκινά από την ακριβή σημασία της πρότασης που είπε η Μαίρη.

Στην καθημερινή ζωή μας είμαστε αναγκασμένοι συχνά να βγάζουμε συμπεράσματα με αυτόν τον τρόπο. Αλλά θα ήταν χρήσιμο να καταλάβουμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα σε συμπεράσματα τα οποία βγαίνουν λογικά από προτάσεις που διατυπώνονται από άλλους και σε συμπεράσματα που βγαίνουν μόνο αν κάνουμε παραδοχές. Συχνά αυτές είναι «λογικές» παραδοχές, αλλά είναι αδύνατο να καθοριστεί με ακρίβεια τι είναι μια «λογική» παραδοχή και τι δεν είναι. Στο παραπάνω παράδειγμα, η παραδοχή που κάναμε θα μπορούσε να είναι λάθος. Η Μαίρη μπορεί να μην ενδιαφερόταν να συγκρίνει τον εαυτό της με τα αγόρια ή μπορεί τα αγόρια να μην έγραψαν διαγώνισμα ή μπορεί η έκφραση «όλα τα κορίτσια» να σημαίνει «όλη η τάξη» αν το σχολείο της Μαίρης ήταν μόνο για κορίτσια (μολονότι, αν συνέβαινε το τελευταίο, θα πρέπει να ήταν γνωστό στον αδελφό της)... Οι δυνατότητες για τέτοιου είδους υποθέσεις είναι ατέλειωτες.

Η ΑΡΝΗΣΗ

Ιδιαίτερες δυσκολίες και πραγματικές ασάφειες προκύπτουν όταν η λέξη **δεν** χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τις λέξεις **όλα**, **μερικά**, **και**, **ή**.

Η χαρακτηριστική δυσκολία με τις λέξεις **όλα** και **δεν** μπορεί να εκφραστεί από την παροιμία «Όλα τα πράγματα που λάμπουν δεν είναι χρυσός». Η παροιμία αυτή κατανοείται, φυσικά, σαν η άρνηση της διατύπωσης «Όλα τα πράγματα που λάμπουν είναι χρυσός». Δηλαδή με την έννοια πως «Δεν είναι σωστό ότι όλα τα πράγματα που λάμπουν είναι χρυσός». Συνήθως, όταν σχηματίζουμε την άρνηση μιας απλής πρότασης τοποθετούμε τη λέξη **δεν** μπροστά από το ρήμα. Αλλά αυτό δημιουργεί αμφιβολίες όταν η έκφραση αρχίζει με τη λέξη **όλα**. Η έκφραση «Όλα τα πράγματα που λάμπουν δεν είναι χρυσός» μπορεί ενδεχομένως να κατανοηθεί σαν «Όλα τα πράγματα που λάμπουν είναι μη χρυσαφένια», με την έννοια πως «κανένα χρυσό αντικείμενο δεν λάμπει». Αυτή, βέβαια, δεν είναι η άρνηση της πρότασης «όλα όσα λάμπουν είναι χρυσός», αλλά μάλλον η αντίθετή της.

Τα παιδιά μπορούν να εισαχθούν στην ιδέα της άρνησης μιας πρότασης και στις χαρακτηριστικές δυσκολίες με τις λέξεις **όλα** και **μερικά** με συζητήσεις και παραδείγματα σαν τα παρακάτω που μπορούν να γίνουν μέσα στην τάξη.

Η έκφραση «Είναι ψέμα ότι ο Γιάννης είναι άρρωστος» είναι η ***άρνηση*** *της έκφρασης «Ο Γιάννης είναι άρρωστος». Συνήθως λέμε απλά ότι «Ο Γιάννης δεν είναι άρρωστος» αντί του «Είναι ψέμα ότι ο Γιάννης είναι άρρωστος».*
Η διατύπωση «Ο Γιάννης δεν είναι άρρωστος» είναι ***ψέμα*** *αν η διατύπωση «Ο Γιάννης είναι άρρωστος» είναι αλήθεια. Όμοια, η διατύπωση «Ο Γιάννης δεν είναι άρρωστος» είναι* ***αλήθεια*** *αν η διατύπωση «Ο Γιάννης είναι άρρωστος» είναι ψέμα.*
Διατυπώστε γραπτά την άρνηση καθεμιάς από τις πιο κάτω εκφράσεις:
Βρέχει.
Ο κύριος Αλέκος είναι παντρεμένος.
Δεν ήμουν εδώ χθες.
Ο Γιάννης τραγούδησε στη χορωδία.
Αυτές οι νέες εκφράσεις που προκύπτουν είναι διατυπωμένες σε σωστά ελληνικά; Μπορούμε να πούμε πως σε κάθε περίπτωση δεν έχεις παρά να βάλεις ένα ***δεν*** *στην αρχική έκφραση; Θα μπορούσαμε σε μερικές περιπτώσεις να διατυπώσουμε αυτή την άρνηση με κάπως διαφορετικό τρόπο;*

Πρόταση	**Άρνηση της πρότασης**
Βρέχει.	Δεν βρέχει.
Ο κύριος Αλέκος είναι παντρεμένος.	Ο κύριος Αλέκος δεν είναι παντρεμένος. Ή: «Ο κύριος Αλέκος είναι ανύπαντρος».
Δεν ήμουν εδώ χθες.	Ήμουν εδώ χθες.
Τραγούδησε στη χορωδία.	Δεν τραγούδησε στη χορωδία.

Για να σχηματίσουμε μια πρόταση σε στρωτή γλώσσα δεν μπορούμε πάντα να σχηματίζουμε την άρνηση βάζοντας απλά τη λέξη ***δεν****. Ας πάρουμε την έκφραση «Όλα τα παιδιά είναι κουρασμένα». Η άρνηση αυτής της έκφρασης είναι: «Είναι ψέμα ότι όλα τα παιδιά είναι κουρασμένα». Μήπως κάποια από τις διατυπώσεις που ακολουθούν είναι ένας συντομότερος ή απλούστερος τρόπος γραφής αυτής της άρνησης;*
Όλα τα παιδιά δεν είναι κουρασμένα.
Δεν είναι όλα τα παιδιά κουρασμένα.
Θα μπορούσε η μία από αυτές να σημαίνει και κάτι διαφορετικό; Ποια είναι εντελώς σαφής;
Είναι κάποια από τις παρακάτω εκφράσεις η άρνηση της αρχικής;
Τουλάχιστον ένα από τα παιδιά δεν είναι κουρασμένο.
Μερικά από τα παιδιά δεν είναι κουρασμένα.
Κανένα παιδί δεν είναι κουρασμένο.

Και οι δύο πρώτες εκφράσεις μπορούν να κατανοηθούν ότι σημαίνουν την άρνηση της πρότασης «Όλα τα παιδιά είναι κουρασμένα», αλλά η πρώτη από αυτές δημιουργεί αμφιβολίες. Μπορεί να σημαίνει ότι «Όλα τα παιδιά είναι ξεκούραστα» και αυτό δεν είναι η άρνηση της «Όλα τα παιδιά είναι κουρασμένα».
Η πρόταση «Δεν είναι όλα τα παιδιά κουρασμένα» εκφράζει τη ζητούμενη άρνηση χωρίς να δημιουργεί αμφιβολίες. (Πάντως, σημειώστε ότι η έκφραση στη φωνή μπορεί να κάνει και την «Όλα τα παιδιά δεν είναι κουρασμένα – με τονισμό στο **δεν** και άτονο το **όλα** – εντελώς σαφή).
«Τουλάχιστον ένα από τα παιδιά δεν είναι κουρασμένο» είναι επίσης η άρνηση της πρότασης «Όλα τα παιδιά είναι κουρασμένα».
«Μερικά από τα παιδιά δεν είναι κουρασμένα» είναι επίσης η άρνηση, με την προϋπόθεση, όμως, ότι το «μερικά» κατανοείται να σημαίνει «τουλάχιστον ένα».
«Κανένα από τα παιδιά δεν είναι κουρασμένο», δηλαδή «όλα είναι ξεκούραστα», **δεν είναι** η άρνηση της αρχικής πρότασης.

Γράψτε την άρνηση καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις όσο γίνεται σαφέστερα:
Όλοι οι μαθηματικοί είναι ιδιοφυείς.
Όλοι οι δάσκαλοι έχουν υπομονή.
Όλοι όσοι ήταν στο αυτοκίνητο τραυματίστηκαν.
Μερικοί άνθρωποι σε αυτό το γραφείο είναι αναξιόπιστοι.
Κανένας από όσους κατοικούν σε αυτόν τον δρόμο δεν είναι εκατομμυριούχος.
Δεν είναι όλοι οι σκύλοι άγριοι.

Εκφράσεις των ζητουμένων αρνήσεων που δεν δημιουργούν αμφιβολίες είναι οι ακόλουθες:
Δεν είναι όλοι οι μαθηματικοί ιδιοφυείς.
Δεν είναι όλοι οι δάσκαλοι υπομονετικοί.
Δεν τραυματίστηκαν όλοι όσοι ήταν στο αυτοκίνητο.
Όλοι οι άνθρωποι σε αυτό το γραφείο είναι αξιόπιστοι. Ή: Κανένας άνθρωπος σε αυτό το γραφείο δεν είναι αναξιόπιστος.
Τουλάχιστον ένας από όσους κατοικούν σε αυτόν τον δρόμο είναι εκατομμυριούχος.
Όλοι οι σκύλοι είναι άγριοι.

Μια ασάφεια σαν κι αυτή που προκύπτει από τις λέξεις **όλα** και **δεν** προκύπτει επίσης και από τις λέξεις **δεν** και **και**. Ας πάρουμε ένα παράδειγμα:

Απαγορεύεται το κολύμπι και το ψάρεμα.
Δεν μπορείς να πας για κολύμπι και για ψάρεμα σήμερα το απόγευμα.

Στην πρώτη διατύπωση απαγορεύεται το κολύμπι καθώς επίσης και το ψάρεμα. Στη δεύτερη πιθανώς απαγορεύεται το να γίνουν και οι δύο δραστηριότητες ταυτόχρονα. Στην καθημερινή ομιλία τα συμφραζόμενα και ο τόνος της φωνής μπορούν να εξαφανίσουν κάθε ασάφεια από μια φράση που περιέχει τις λέξεις **δεν** και **και**. Στη λογική, όμως, και στα Μαθηματικά οι ασάφειες αποφεύγονται με τη χρησιμοποίηση τυποποιημένων συνδέσεων. Εκείνο που εδώ προτείνεται (όπως και στις προηγούμενες συζητήσεις για τις λέξεις **μερικά** και **ή**) είναι να αποκτήσουν τα παιδιά επίγνωση των πιθανών συγχύσεων και να προσπαθούν πάντα να εκφραστούν όσο πιο ξεκάθαρα μπορούν.

«Μπιφτέκι και γλυκό δεν σερβίρεται με ένα γεύμα που κοστίζει 6 ευρώ». Τι νομίζετε ότι σημαίνει αυτή η πρόταση; Μπορούσε να σημαίνει και κάτι διαφορετικό; Προσπαθήστε να εκφράσετε αυτό που νομίζετε ότι σημαίνει, όσο πιο ξεκάθαρα μπορείτε.
Κάντε το ίδιο για την πρόταση «Σκυλιά και γάτες δεν επιτρέπονται σ' αυτή την πολυκατοικία».

«Μπιφτέκι και γλυκό δεν σερβίρεται με ένα γεύμα που κοστίζει 6 ευρώ». Η πρόταση αυτή πιθανώς σημαίνει: «Με ένα γεύμα που κοστίζει 6 ευρώ σερβίρεται μπιφτέκι ή γλυκό αλλά όχι και τα δύο». Θα μπορούσε, όμως, να σημαίνει και: «Με ένα γεύμα που κοστίζει 6 ευρώ δεν σερβίρεται ούτε μπιφτέκι ούτε γλυκό».

«Σκυλιά και γάτες δεν επιτρέπονται σ' αυτή την πολυκατοικία». Η πρόταση αυτή πιθανώς σημαίνει «Σ' αυτή την πολυκατοικία δεν επιτρέπονται ούτε σκυλιά ούτε γάτες». Θα μπορούσε όμως να σημαίνει και: «Σ' αυτή την πολυκατοικία επιτρέπονται σκυλιά ή γάτες, αλλά όχι και τα δύο μαζί». Η πιο πιθανή ερμηνεία σ' αυτή την περίπτωση αντιστοιχεί στη λιγότερο πιθανή ερμηνεία της προηγούμενης. Μόνο η γνώση μας σχετικά με το τι είναι λογικό ή συνηθισμένο μας δίνει τη δυνατότητα να αποφασίζουμε ποια είναι η πιο πιθανή ερμηνεία κάθε φορά.

Γράψτε την άρνηση καθεμιάς από τις ακόλουθες προτάσεις, προσέχοντας κάθε φορά να γράφετε ακριβώς αυτό που εννοείτε:
Ο Γιάννης και η Μαίρη θα έρθουν και οι δύο στο πάρτι.
Ο αριθμός α είναι μικρότερος από το 10 και μεγαλύτερος από το 5.
Υπάρχουν τουλάχιστο δύο τεμπέληδες σ' αυτή την τάξη.
Ο Πέτρος ή ο Παύλος θα σε βοηθήσουν.

Πρόταση	**Άρνηση της πρότασης**
Ο Γιάννης και η Μαίρη θα έρθουν και οι δύο στο πάρτι.	Ο Γιάννης και η Μαίρη δεν θα έρθουν και οι δύο στο πάρτι, και ίσως να μην έρθει ούτε ο ένας ούτε ο άλλος.

Ο αριθμός α είναι μικρότερος από το 10 και μεγαλύτερος από το 5.	Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από το 9 ή μικρότερος από το 6.
Υπάρχουν τουλάχιστο δύο τεμπέληδες σ’ αυτή την τάξη.	Υπάρχει το πολύ ένας τεμπέλης σ’ αυτή την τάξη.
Ο Πέτρος ή ο Παύλος θα σε βοηθήσουν.	Ούτε ο Πέτρος ούτε ο Παύλος θα σε βοηθήσουν.

ΑΝ... ΤΟΤΕ...

Ίσως οι πιο σπουδαίες λέξεις της λογικής που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά αλλά και στην καθημερινή ζωή είναι οι λέξεις **αν... τότε...** Πάρα πολλές μαθηματικές προτάσεις εκφράζονται πολύ φυσικά με τη χρησιμοποίηση αυτών των λέξεων:

Αν $y>2$ τότε $y\times y>4$
Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Αν $x+7=3$ τότε $x=-4$
Αν το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού, γραμμένου σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα, διαιρείται με το 3, τότε διαιρείται κι ο αριθμός.

Όλες αυτές οι εκφράσεις είναι αληθείς. Παρατηρούμε ότι η πρόταση που ακολουθεί τη λέξη «τότε» είναι αληθής **οποτεδήποτε** η πρόταση που ακολουθεί τη λέξη «αν» είναι αληθής. Είναι πολύ σπουδαίο να καταλάβουμε ότι αυτό ακριβώς εννοούμε όταν λέμε πως μια έκφραση που περιέχει τις λέξεις «αν... τότε...» είναι αληθής. Αυτό θα ήταν ίσως πιο σαφές αν το απλό «τότε» το αντικαταστούσαμε με το «τότε αναγκαστικά» και στην πραγματικότητα αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε.
Ας πάρουμε μερικά ακόμη παραδείγματα:

1. Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8.
2. Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μικρότερος του 7.
3. Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μεγαλύτερος του 12.

1. Η πρώτη έκφραση είναι ολοφάνερα αληθής και η σημασία της προφανώς δεν αλλάζει αν το «τότε» αντικατασταθεί από το «τότε αναγκαστικά».

2. Η δεύτερη έκφραση είναι σαφώς ψευδής είτε αντικατασταθεί το «τότε» με το «τότε αναγκαστικά» είτε όχι.

3. Η τρίτη έκφραση είναι επίσης ψευδής. Και γίνεται αυτό ακόμα πιο φανερό αν το «τότε» αντικατασταθεί με το «τότε αναγκαστικά». Η τρίτη έκφραση θα μπορούσε να θεωρηθεί αληθής μόνο αν το «τότε» σήμαινε «τότε πιθανώς». Αλλά αυτή η έννοια του «τότε» είναι πολύ διαφορετική από εκείνη της πρώτης έκφρασης. Θα μπορούσε ίσως να φανεί ότι η **3** δεν είναι εντελώς καθορισμένα αληθής ή ψευδής, αλλά ότι μπορεί να είναι αληθής ορισμένες φορές, όπως μπορεί και να μην είναι. Εντούτοις, το τμήμα της **3** που μπορεί να είναι ή να μην είναι αλήθεια αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4 είναι το «ο 2n είναι μεγαλύτερος του 12» και όχι ολόκληρη η έκφραση. Ολόκληρη η έκφραση είναι **ψευδής** γιατί **δεν** είναι αλήθεια πως ο 2n είναι μεγαλύτερος του 12 **οποτεδήποτε** ο n είναι μεγαλύτερος του 4. Με άλλα λόγια, γιατί όταν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, ο 2n δεν είναι **αναγκαστικά** μεγαλύτερος του 12.

Οι διαφορετικές πιθανότητες που εκφράστηκαν με τα παραδείγματα **1**, **2**, **3** προκύπτουν με μη μαθηματικές προτάσεις όπως οι επόμενες:

4. Αν αυτός είναι αδελφός της Μαίρης, τότε αυτός και η Μαίρη έχουν τους ίδιους γονείς.
5. Αν αυτός είναι αδελφός της Μαίρης, τότε ο πατέρας του είναι θείος της Μαίρης.
6. Αν αυτός είναι αδελφός της Μαίρης, τότε είναι μεγαλύτερος από εκείνη.

Υποθέτοντας ότι αδελφός σημαίνει πραγματικός και όχι υιοθετημένος ή από άλλο γάμο, η έκφραση **4** είναι ολοφάνερα αληθής και η **5** είναι ολοφάνερα ψευδής. Η έκφραση **6** είναι επίσης ψευδής, γιατί αν αυτός είναι αδελφός της Μαίρης δεν είναι **αναγκαστικά** μεγαλύτερος από αυτή, αν και θα μπορούσε βέβαια να είναι.

Σημείωση 1. Αν και το «τότε αναγκαστικά» είναι πιο ξεκάθαρο από το απλό «τότε», στην πράξη σπάνια χρησιμοποιείται. Για να διατυπώσουμε μάλιστα ένα νόημα σε στρωτή γλώσσα πρέπει συχνά να διαχωρίζουμε το «τότε» από το «αναγκαστικά», π.χ. «Αν αυτός είναι αδελφός της Μαίρης, **τότε** αυτός και η Μαίρη έχουν **αναγκαστικά** τους ίδιους γονείς». Στην πράξη η λέξη «τότε» συχνά παραλείπεται, αλλά το να την περιλάβουμε μέσα στην πρόταση κάνει το νόημα πιο ξεκάθαρο. Και σ' αυτό το βιβλίο σχεδόν πάντα θα χρησιμοποιείται, αν και μερικές φορές θα ερχόταν πιο φυσιολογικό να παραλειφθεί.

Σημείωση 2. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και η έκφραση *«Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8»* είναι αληθής, ξεχωριστά καθεμιά από τις προτάσεις «ο n είναι μεγαλύτερος του 4» και «ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8» δεν είναι ούτε αληθείς ούτε ψευδείς παρά μόνο αν δοθεί στον n μια αριθμητική τιμή. Μπορούν να χαρακτηριστούν «ανοιχτές προτάσεις» στις οποίες ο n είναι μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει διάφορες αριθμητικές τιμές. Οι προτάσεις αυτές γίνονται αληθείς ή ψευδείς μόνο όταν ο n αντικατασταθεί ή νοηθεί να σημαίνει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό. Εδώ μπορεί κανείς να νομίσει ότι υπάρχει κάποια αντίφαση, γιατί η μεταβλητή n εμφανίζεται, επίσης, και στην έκφραση *«Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8»*, η οποία βέβαια είναι αληθής. Η εξήγηση είναι ότι η έκφραση *«Αν ο n είναι μεγαλύτερος του 4, τότε ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8»* δεν είναι ανοιχτή πρόταση που χρειάζεται αντικατάσταση του n για να γίνει τελείως ορισμένη. Μάλλον είναι μια έκφραση για αντικαταστάσεις του n, με την έννοια ότι κάθε αντικατάσταση η οποία κάνει αληθή την ανοιχτή πρόταση «ο n είναι μεγαλύτερος του 4» θα κάνει επίσης αληθή και την ανοιχτή πρόταση «ο 2n είναι μεγαλύτερος του 8». Τα παραδείγματα **4**, **5**, **6** δεν είναι ανοιχτές προτάσεις αν και η λέξη «αυτός» είναι μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει το όνομα του αγοριού. (Στην πραγματικότητα και η λέξη «Μαίρη» μπορεί να θεωρηθεί μια μεταβλητή σε αυτά τα παραδείγματα, γιατί ενώ κατανοείται να σημαίνει ένα συγκεκριμένο πρόσωπο, θα μπορούσε εντούτοις να αντικατασταθεί από το όνομα **οποιουδήποτε** κοριτσιού).

Ποιες από τις επόμενες εκφράσεις νομίζετε πως είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; (Μια έκφραση που περιέχει τις λέξεις «αν... τότε...» είναι αληθής αν η πρόταση που εισάγεται με τη λέξη «τότε» προκύπτει αναγκαστικά από εκείνη που εισάγεται με τη λέξη «αν». Αν αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή αν δεν προκύπτει ***αναγκαστικά****, η έκφραση ολόκληρη είναι ψευδής).*

1. *Αν ο Γιάννης είναι αδελφός της Μαίρης, τότε η Μαίρη είναι αδελφή του Γιάννη.*
2. *Αν ο Γιάννης είναι ο μεγαλύτερος από τους αδελφούς της Μαίρης, τότε η Μαίρη είναι η μικρότερη από τις αδελφές του Γιάννη.*
3. *Αν ο n είναι περιττός αριθμός, τότε ο 2n είναι άρτιος.*
4. *Αν ο Πέτρος έχει 3 πορτοκάλια και ο Μιχάλης έχει άλλα 3, τότε και οι δύο μαζί έχουν 6 πορτοκάλια.*
5. *Αν η 1η Δεκεμβρίου του επόμενου χρόνου πέφτει ημέρα Τετάρτη, τότε τα Χριστούγεννα του χρόνου αυτού πέφτουν ημέρα Σάββατο.*

↓

(Σημειώστε ότι αποφασίζοντας για την τελευταία αυτή έκφραση, δεν έχει σημασία αν ***πραγματικά*** *η 1η Δεκεμβρίου του επόμενου χρόνου πέφτει ημέρα Τετάρτη. Με άλλα λόγια, για ποιον επόμενο χρόνο πρόκειται; Για τον «επόμενο χρόνο» για σας τώρα ή τον «επόμενο χρόνο» από τότε που γράφονται αυτές οι λέξεις;)*

6. *Αν* $\alpha = -3$, *τότε* $\alpha \times \alpha = +9$
7. *Αν* $\alpha \times \alpha = +9$, *τότε* $\alpha = -3$
8. *Αν μια ευθεία* ε_1 *είναι κάθετη ως προς δύο άλλες ευθείες* ε_2 *και* ε_3, *τότε οι ευθείες* ε_2 *και* ε_3 *είναι παράλληλες.*
9. *Αν ο κ. Μήλας διέπραξε το έγκλημα, τότε δεν μπορεί να έχει άλλοθι.*
10. *Αν την επόμενη βδομάδα βρέχει κάθε μέρα, τότε τη μεθεπόμενη βδομάδα θα κάνει τουλάχιστο μια μέρα καλή.*
11. *Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε έχουν το ίδιο εμβαδό.*
12. *Αν* $\alpha \times \beta = 0$, *τότε* $\alpha = 0$.

Θα μπορούσε η λέξη «τότε» να παραληφθεί από μερικές από τις πιο πάνω εκφράσεις; Μήπως το νόημα είναι μερικές φορές καθαρότερο αν τη συμπεριλάβουμε στην πρόταση; Ξαναγράψτε τις ακόλουθες εκφράσεις, βάζοντας τη λέξη «τότε» στη σωστή θέση και αλλάζοντας τη σειρά των λέξεων αν χρειάζεται.

13. *Αν* $n > 5$, $n^2 > 25$
14. *Αν* $\alpha + \beta = 6$ *και* $\alpha = \beta$, $\alpha = 3$ *και* $\beta = 3$
15. $\alpha = +1$ *ή* $\alpha = -1$ *αν* $\alpha \times \alpha = +1$
16. *Αν ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης, αυτή πρέπει να είναι θεία του.*
17. *Ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης αν ο πατέρας του είναι αδελφός της.*

Φτιάξτε μόνοι σας μερικές προτάσεις που να περιέχουν τις λέξεις «αν... τότε...» και ρωτήστε κάποιον να σας πει αν είναι αλήθεια ή ψέμα.

Οι προτάσεις με αριθμούς 1, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 16, 17 είναι αληθείς. Εκείνες με αριθμούς 2, 7, 10, 11, 12 είναι ψευδείς.
Η 8 είναι αληθής αν όλες οι θεωρούμενες ευθείες βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο, και ψευδείς αν οι θεωρούμενες ευθείες βρίσκονται στον χώρο των τριών διαστάσεων.
Η 9 είναι αληθής αν η λέξη «άλλοθι» κατανοείται να σημαίνει «αληθινό άλλοθι» και ψευδής αν η ίδια λέξη κατανοείται να σημαίνει «προβαλλόμενο άλλοθι».
Η λέξη «τότε» θα μπορούσε να παραληφθεί από όλες τις προτάσεις 1-12, αλλά σχεδόν πάντα το νόημα είναι ξεκάθαρο αν παρεμβληθεί. Με την παρεμβολή της λέξης «τότε» οι προτάσεις 13-17 γίνονται:

13. Αν $n > 5$, τότε $n^2 > 25$
14. Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha = \beta$, τότε $\alpha = 3$ και $\beta = 3$
15. Αν $\alpha \times \alpha = +1$, τότε $\alpha = +1$ ή $\alpha = -1$
16. Αν ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης, τότε αυτή πρέπει να είναι θεία του.
17. Αν ο πατέρας του είναι αδελφός της, τότε ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης. (Αν τα ονόματα επαναληφθούν, το νόημα γίνεται πιο ξεκάθαρο: «Αν ο πατέρας του Γιάννη είναι αδελφός της Μαίρης, τότε ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης).

Για να αποφασίσουμε αν μια έκφραση που διατυπώνεται με τις λέξεις «αν... τότε...» και που περιέχει μεταβλητές είναι αληθής ή όχι, πρέπει να γνωρίζουμε τις αντικαταστάσεις που μπορούν να γίνουν όσον αφορά τις μεταβλητές, δηλαδή να γνωρίζουμε το σύνολο αναφοράς. Γενικά, το σύνολο αυτό γίνεται φανερό από τα συμφραζόμενα, αλλά αν δεν γίνεται τότε μπορούν να δημιουργηθούν αμφιβολίες. Έτσι, στα προηγούμενα παραδείγματα η έκφραση *«Αν μια ευθεία* ε_1 *είναι κάθετη ως* *προς δύο άλλες ευθείες $ε_2$ και $ε_3$, τότε οι ευθείες $ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες»* είναι μεν σωστή αν θεωρούμε ευθείες που κείνται σε ένα επίπεδο, αλλά λάθος αν θεωρούμε ευθείες του χώρου, γιατί στον χώρο δύο οποιεσδήποτε οριζόντιες γραμμές είναι κάθετες ως προς μια κατακόρυφη. Επίσης, η έκφραση «Αν $n^2 > 4$, τότε $n > 2$» είναι σωστή αν το σύνολο αναφοράς είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, αλλά λάθος αν είναι το σύνολο των θετικών και αρνητικών ακεραίων. Ο μόνος σίγουρος τρόπος αποφυγής αμφιβολιών είναι να ορίζεται σαφώς, σε κάθε περίπτωση, το σύνολο αναφοράς. Πάντως, σε αυτό το βιβλίο, συχνά, οι λέξεις είναι έτσι διαλεγμένες ώστε να αποφεύγονται, κατά το δυνατό, τέτοιου είδους αμφιβολίες.

Ένα σημείο που χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή σχετικά με την έκφραση «αν... τότε...» είναι ότι οι δύο προτάσεις, αυτή που εισάγεται με τη λέξη «αν» και εκείνη που εισάγεται με τη λέξη «τότε», δεν μπορούν να εναλλαχθούν χωρίς η έκφραση να αλλάξει νόημα. (Με την προϋπόθεση ότι κρατάμε τις θέσεις των λέξεων «αν» και «τότε» σταθερές).

> *Η έκφραση «Αν ο 2n είναι άρτιος αριθμός, τότε ο n είναι περιττός» είναι εντελώς διαφορετική από την «Αν ο n είναι περιττός αριθμός, τότε ο 2n είναι άρτιος».*

Πράγματι, η δεύτερη έκφραση είναι αληθής, ενώ η πρώτη όχι. Είτε όμως και οι δύο εκφράσεις που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο είναι αληθείς είτε όχι, το **νόημά** τους είναι διαφορετικό. Βέβαια, το νόημα δεν αλλάζει αν οι λέξεις «αν» και «τότε» εναλλαχθούν μαζί με τις προτάσεις που εισάγουν, μολονότι συνήθως πρέπει να παραλείψουμε το «τότε» για να σχηματίσουμε την πρόταση σε στρωτή γλώσσα.

> *Η έκφραση «Ο 2n είναι άρτιος αριθμός, αν ο n είναι περιττός» σημαίνει ακριβώς το ίδιο με την έκφραση «Αν ο n είναι περιττός αριθμός, τότε ο 2n είναι άρτιος».*

Για να προχωρήσουμε περισσότερο, είναι χρήσιμο να μπορέσουμε να αναφερόμαστε σε μια «αν... τότε...» έκφραση σαν να ήταν του τύπου «αν p, τότε q», όπου τα γράμματα p και q» συμβολίζουν προτάσεις (φυσικά ανοιχτές προτάσεις).

Παράδειγμα 1
p: σήμερα είναι Κυριακή
q: χθες ήταν Σάββατο
Αν p, τότε q: Αν σήμερα είναι Κυριακή, τότε χθες ήταν Σάββατο.
Αν q, τότε p: Αν χθες ήταν Σάββατο, τότε σήμερα είναι Κυριακή.
Ολοφάνερα, σε αυτή την περίπτωση, τόσο η έκφραση «αν p, τότε q» όσο και η «αν q, τότε p» είναι και οι δύο αληθείς.

Παράδειγμα 2
p: πέρσι ήταν 1999
q: φέτος ο χρόνος είναι δίσεκτος
Αν p, τότε q: Αν πέρσι ήταν 1999, τότε φέτος ο χρόνος είναι δίσεκτος.
Αν q, τότε p: Αν φέτος ο χρόνος είναι δίσεκτος, τότε πέρσι ήταν 1999.
Σε αυτή την περίπτωση, η έκφραση «αν p, τότε q» είναι αληθής γιατί αν πέρσι ήταν 1999, τότε φέτος είναι 2000 και πράγματι αυτός ο χρόνος είναι δίσεκτος. Η έκφραση όμως «αν q, τότε p» είναι **ψευδής** γιατί αν φέτος ο χρόνος είναι δίσεκτος δεν είναι **απαραίτητο** πέρσι να ήταν 1999.

Στα Μαθηματικά είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε ότι η αλήθεια της έκφρασης «αν p, τότε q» δεν εξασφαλίζει την αλήθεια της «αν q, τότε p». Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό από την εναλλαγή των προτάσεων στις «αν... τότε...» εκφράσεις που αναφέρονται στις προηγούμενες ασκήσεις.

Προσπαθήστε να αντιστρέψετε τις «αν... τότε...» προτάσεις των προηγουμένων ασκήσεων, π.χ. αλλάξτε την έκφραση «Αν ο Γιάννης είναι αδελφός της Μαίρης, τότε η Μαίρη είναι αδελφή του Γιάννη» με την έκφραση «Αν η Μαίρη είναι αδελφή του Γιάννη, τότε ο Γιάννης είναι αδελφός της Μαίρης».
Η νέα έκφραση που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι πάντα διατυπωμένη σε στρωτή γλώσσα; Όπου δεν είναι, μπορείτε να αλλάξετε τις λέξεις, χωρίς να αλλάξει το νόημα, έτσι ώστε η νέα έκφραση να είναι διατυπωμένη σωστά;
*Καθεμιά από τις νέες αυτές εκφράσεις καλείται **αντίστροφη** εκείνης από την οποία προέκυψε. Αν μια «αν... τότε...» έκφραση είναι αληθής, είναι και η αντίστροφή της αναγκαστικά αληθής; Αν πάλι μια «αν... τότε...» έκφραση είναι ψευδής, είναι απαραίτητα και η αντίστροφή της ψευδής;*

Σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός από τις 9, 10 και 16, η εναλλαγή των προτάσεων που εισάγονται από τις λέξεις «αν» και «τότε», χωρίς άλλες αλλαγές, παράγει την αντίστροφη πρόταση σε στρωτή γλώσσα.
Στην 9 η έκφραση «τότε δεν μπορεί» έχει την ίδια σημασία με την έκφραση «τότε οπωσδήποτε δεν έχει» ή απλά «τότε δεν έχει». Η πρόταση «Αν ο κ. Μήλας δεν έχει άλλοθι, τότε διέπραξε το έγκλημα» είναι εκφρασμένη σε στρωτή γλώσσα ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο με την έκφραση «Αν δεν μπορεί να έχει άλλοθι, τότε ο κ. Μήλας διέπραξε το έγκλημα». Όμοια, στη 16, η έκφραση «αυτή πρέπει» σημαίνει «οπωσδήποτε είναι» ή απλά «είναι». Η πρόταση «Αν αυτή είναι θεία του, τότε ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης» είναι εκφρασμένη σχετικά καλά, αν και θα ήταν καλύτερα να επαναληφθούν τα μικρά ονόματα. Δεν ισχύει όμως το ίδιο με την πρόταση «Αν αυτή πρέπει να είναι θεία του, τότε ο Γιάννης είναι ανηψιός της Μαίρης».
Στη 10, εκτός από την εναλλαγή των προτάσεων που εισάγονται από τις λέξεις «αν» και «τότε», χρειάζονται και αλλαγές στους χρόνους των ρημάτων. Η αντίστροφη της πρότασης αυτής θα μπορούσε να εκφραστεί: «Αν κάνει το λιγότερο μια ωραία μέρα τη μεθεπόμενη βδομάδα, τότε τη βδομάδα που έρχεται θα βρέχει κάθε μέρα.

Έστω ότι μια «αν... τότε...» έκφραση είναι αληθής. Η αντίστροφή της μπορεί να είναι αληθής, μπορεί όμως να είναι και ψευδής. Έτσι, οι προτάσεις **1** και **3** είναι και οι δύο αληθείς, αλλά ενώ η αντίστροφη της **1** είναι αληθής, η αντίστροφη της **3** είναι ψευδής.
Επίσης, αν μια «αν... τότε...» έκφραση είναι ψευδής, η αντίστροφή της μπορεί να είναι ψευδής, μπορεί όμως και να είναι αληθής. Έτσι, οι προτάσεις **2** και **12** είναι και οι δύο ψευδείς. Αλλά ενώ η αντίστροφη της **2** είναι επίσης ψευδής, η αντίστροφη της **12** είναι αληθής.

Συχνά μια έκφραση που δεν περιέχει τις λέξεις «αν... τότε...» είναι ισοδύναμη με μια άλλη που τις περιέχει. Έτσι, η έκφραση «το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι αριθμός περιττός» μπορεί να διατυπωθεί: «Αν ένας αριθμός είναι περιττός, τότε το τετράγωνό του είναι αριθμός περιττός». (Ή βέβαια, «αν ο n είναι περιττός, τότε ο nxn είναι περιττός»). Επειδή τα μαθηματικά επιχειρήματα διατυπώνονται συνήθως καλύτερα με εκφράσεις του τύπου «αν... τότε...», είναι ωφέλιμη άσκηση η μετατροπή κατάλληλων εκφράσεων σε εκφράσεις τέτοιου τύπου.

Μπορείτε να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις σαν εκφράσεις του τύπου «αν... τότε...»;
Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος.
Όσοι είναι μεγαλύτεροι των 18 ετών μπορούν να ψηφίσουν.
Κανένα τέλειο τετράγωνο δεν είναι πρώτος αριθμός.
Κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.
Κάθε εργαζόμενος άνθρωπος έχει ανάγκη από ξεκούραση.
Ένα τρίγωνο, του οποίου οι πλευρές είναι αντίστοιχα 3 εκ., 4 εκ. και 5 εκ., είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Αν δύο αριθμοί είναι περιττοί, τότε το άθροισμά τους είναι αριθμός άρτιος.
Αν είσαι πάνω από 18 ετών, τότε μπορείς να ψηφίσεις.
Αν ένας αριθμός είναι τέλειο τετράγωνο, τότε δεν είναι πρώτος αριθμός.
Αν ένα σχήμα είναι ορθογώνιο, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
Αν ένας άνθρωπος εργάζεται, τότε έχει ανάγκη από ξεκούραση.
Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι 3 εκ., 4 εκ. και 5 εκ., τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ των λέξεων «όλα» και «αν». Το ίδιο συμβαίνει και με τις λέξεις «κανένα» και «αν». Το να πούμε πως όλα τα πράγματα που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα έχουν και μια άλλη είναι ακριβώς το ίδιο με το να πούμε πως **αν** κάποιο πράγμα έχει την πρώτη ιδιότητα, **τότε** έχει και τη δεύτερη. Μπορούμε πράγματι να διατυπώσουμε πολλές «αν... τότε...» εκφράσεις χρησιμοποιώντας όρους που φανερώνουν πως ένα σύνολο περιέχεται σε ένα άλλο. Η έκφραση «Αν ο x έχει την ιδιότητα α, τότε έχει και την ιδιότητα β» είναι ισοδύναμη με την έκφραση «Το σύνολο των πραγμάτων με την ιδιότητα α περιέχεται στο σύνολο όλων των πραγμάτων με την ιδιότητα β».

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισαχθούν μερικοί συμβολισμοί σχετικοί με τα σύνολα.

Αν ένα σύνολο Α περιέχεται σε ένα σύνολο Β, γράφουμε: $A \subset B$ (το Α περιέχεται στο Β), καθώς επίσης: $B \supset A$ (που διαβάζεται «το Β περιέχει το Α»).

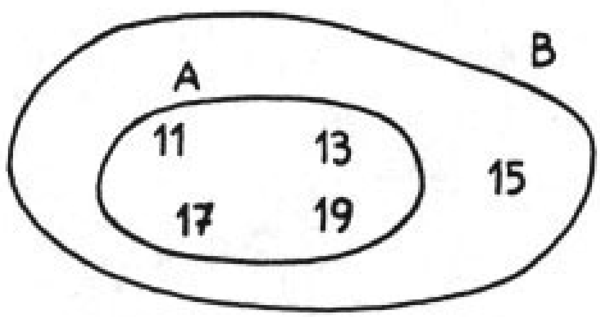
Για να ξεχωρίσουμε τελείως τα σύμβολα $\subset$ και $\supset$ είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι αν είναι $A \subset B$ τότε ο αριθμός των στοιχείων του Α είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό των στοιχείων του Β, και το σύμβολο για το «μικρότερος» (δηλαδή το $<$) μοιάζει με το σύμβολο $\subset$.
(Τα περισσότερα σύνολα εδώ είναι πεπερασμένα κι έτσι ο ισχυρισμός σχετικά με το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α και Β είναι προφανώς αληθής. Με την επέκταση, όμως, της έννοιας του αριθμού, ο ισχυρισμός αυτός είναι πράγματι αληθής ακόμη και αν τα σύνολα Α και Β είναι απειροσύνολα).

Συχνά η φράση «ο αριθμός των στοιχείων του Α» συμβολίζεται με το $n(A)$. Κι έτσι έχουμε: Αν $A \subset B$, τότε $n(A) \leq n(B)$.

Παράδειγμα
Αν Α είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών μεταξύ του 10 και του 20, και Β είναι το σύνολο των περιττών αριθμών μεταξύ του 10 και του 20, τότε $A = \{11, 13, 17, 19\}$, $B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ και $A \subset B$.

Επίσης είναι $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ και άρα $n(A) \leq n(B)$.

Χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα του Venn, μπορούμε να δείξουμε παραστατικά την κατάσταση ως εξής:



Η ίδια κατάσταση διατυπωμένη με τις λέξεις «αν... τότε...» παρουσιάζεται ως εξής:
«Αν ο n είναι πρώτος αριθμός μεταξύ του 10 και του 20, τότε ο n είναι περιττός αριθμός μεταξύ του 10 και του 20».

Ένα σύνολο A μπορεί να θεωρηθεί υποσύνολο του εαυτού του, δηλαδή $A \subset A$.
Η σχέση $A \subset B$ δεν σημαίνει ότι $A = B$. («$A = B$» σημαίνει ότι τα σύνολα A και B είναι ακριβώς τα ίδια, δηλαδή ότι έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και όχι μόνο το ίδιο **πλήθος** στοιχείων).

Στις ακόλουθες ερωτήσεις τα σύνολα X και Y είναι **πεπερασμένα**. Η λέξη «πεπερασμένα» έχει παραληφθεί σαν πιθανή αιτία σύγχυσης, αλλά μπορεί να προστεθεί αν χρειαστεί.

Σε αυτές τις προτάσεις τα X και Y συμβολίζουν σύνολα. Ποιες νομίζετε πως είναι αληθείς; Συζητήστε τις απαντήσεις σας με τον καθηγητή σας.

1. *Αν* $X \subset Y$, *τότε* $n(X) \leq n(Y)$
2. *Αν* $X \subset Y$, *τότε* $n(X) < n(Y)$
3. *Αν* $X = Y$, *τότε* $n(X) = n(Y)$
4. *Αν* $X \supset Y$, *τότε* $n(X) \geq n(Y)$
5. *Αν* $n(X) = n(Y)$, *τότε* $X = Y$
6. *Αν* $n(X) \leq n(Y)$, *τότε* $X \subset Y$

Οι 1, 3, 4 είναι αληθείς, ενώ οι 2, 5, 6 ψευδείς.
Η 2 είναι ψευδής γιατί η $X \subset Y$ δεν συνεπάγεται την $X \neq Y$, για την οποία ισχύει ότι $n(X) \neq n(Y)$.

Αξίζει να αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να ερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ των λέξεων «όλα» και «αν». Οι εκφράσεις οι σχετικές με τα χρωματιστά σχήματα της σελίδας 9 που περιέχουν τη λέξη «όλα» (όπως επίσης και εκείνες που περιέχουν τη λέξη «κανένα») μπορούν όλες να διατυπωθούν σαν «αν... τότε...» εκφράσεις. Επίσης, αν τα διάφορα σύνολα των σχημάτων παρασταθούν με γράμματα, οι ίδιες αυτές εκφράσεις μπορούν να διατυπωθούν με τη χρήση του συμβόλου $\subset$. Έτσι, η έκφραση «Όλα τα εξάγωνα είναι μπλε» (όπου η λέξη «όλα» αναφέρεται σε όλα τα εξάγωνα του θεωρούμενου αυτή τη στιγμή συνόλου) είναι ισοδύναμη με την έκφραση «Αν ένα σχήμα είναι εξάγωνο, τότε είναι μπλε». Αλλά είναι επίσης ισοδύναμη και με την έκφραση «$E \subset M$», αν E είναι το σύνολο των εξαγώνων και M το σύνολο των μπλε σχημάτων. Η έκφραση «κανένα τρίγωνο δεν είναι πράσινο» είναι ισοδύναμη με την έκφραση «Αν ένα σχήμα είναι τρίγωνο, τότε δεν είναι πράσινο». Αυτή τη φορά δεν είναι τόσο εύκολο να δούμε πώς θα εκφράσουμε την πρόταση αυτή χρησιμοποιώντας τη σχέση εγκλεισμού μεταξύ των συνόλων. Αν όμως συμβολίσουμε με T το σύνολο των τριγώνων και με K το σύνολο των σχημάτων που **δεν είναι** πράσινα, τότε η έκφραση «κανένα τρίγωνο δεν είναι πράσινο» είναι σίγουρα ισοδύναμη με την έκφραση $T \subset K$, δηλαδή με την έκφραση «όλα τα τρίγωνα είναι όχι πράσινα».

Αν G είναι το σύνολο των πράσινων σχημάτων, το σύνολο των σχημάτων που **δεν είναι** πράσινα καλείται **συμπλήρωμα** του G και συμβολίζεται με G'. Χρειάζεται όμως προσοχή με την έννοια του συμπληρώματος. Το G' θα μπορούσε να κατανοηθεί σαν το σύνολο όλων των αντικειμένων τα οποία δεν είναι πράσινα σχήματα και σαν τέτοιο περιλαμβάνει όχι μόνο σχήματα που δεν είναι πράσινα αλλά και όλα τα αντικείμενα που δεν είναι σχήματα. Αυτό το σύνολο είναι πάρα πολύ μεγάλο για να το χειριζόμαστε εύκολα κι έτσι όταν μιλάμε για το συμπλήρωμα ενός συνόλου θα πρέπει πάντα να έχουμε στο μυαλό μας και, αν είναι απαραίτητο, να έχουμε καθορίσει ένα σύνολο αναφοράς στο οποίο να περιλαμβάνεται το συμπλήρωμα.. Στην παρούσα περίπτωση, σαν κατάλληλο σύνολο αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί το σύνολο των χαρτονένιων σχημάτων που ερευνήθηκε. Η λέξη «συμπλήρωμα» δημιουργεί αμφιβολίες, εκτός αν το σύνολο αναφοράς ορίζεται σαφώς ή είναι γνωστό, κι έτσι χρειάζεται προσοχή όταν χρησιμοποιείται.

Ας είναι:
Z το σύνολο των άρτιων αριθμών
Π το σύνολο των περιττών
A το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται με το 3
B το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται με το 4
Γ το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται με το 6
X το σύνολο των αριθμών που δεν είναι πρώτοι.

Να τρεις τρόποι να πούμε το ίδιο πράγμα:
1. Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 4, τότε είναι άρτιος.
2. Όλοι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 4 είναι άρτιοι.
3. $B \subset Z$

Γράψτε καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις με δύο ακόμη τρόπους. Μπορεί να χρειαστείτε και άλλα γράμματα εκτός από αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Αν ναι, εξηγήστε τι σημαίνουν.

1. *Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε διαιρείται και με το 3.*
2. $\Gamma \subset X$
3. *Όλοι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 6 είναι άρτιοι.*
4. *Κανένας αριθμός που διαιρείται με το 4 δεν είναι πρώτος.*
5. *Κανένας περιττός αριθμός δεν διαιρείται με το 4.*
6. *Κανένας άρτιος αριθμός δεν είναι πρώτος.*
7. *Αν ένας αριθμός είναι πρώτος, δεν διαιρείται με το 6.*

Μία από τις παραπάνω προτάσεις είναι λάθος. Ποια είναι;

Δύο άλλοι τρόποι γραφής των προτάσεων 1-7 είναι οι ακόλουθοι:

1. α) Όλοι οι αριθμοί που διαιρούνται με το 6 διαιρούνται και με το 3.
β) $\Gamma \subset A$
2. α) Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε δεν είναι πρώτος.
β) Κανένας αριθμός που διαιρείται με το 6 δεν είναι πρώτος.
3. α) Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε είναι άρτιος.
β) $\Gamma \subset Z$
4. α) Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 4, τότε δεν είναι πρώτος.
β) $B \subset X$
5. α) Αν ένας αριθμός είναι περιττός, τότε δεν διαιρείται με το 4.
β) $\Pi \subset \Delta$ (Δ είναι το σύνολο των αριθμών που δεν διαιρούνται με το 4)
6. α) Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε δεν είναι πρώτος.
β) $Z \subset X$
7. α) Κανένας πρώτος αριθμός δεν διαιρείται με το 6.
β) $Y \subset \Phi$ (Υ είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών και Φ το σύνολο των αριθμών που δεν διαιρούνται με το 6).

Τα σύνολα Δ, Φ, Υ είναι τα συμπληρώματα, ως προς το σύνολο αναφοράς {1, 2, 3,...}, των συνόλων Β, Γ, Χ αντίστοιχα. Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του συμπληρώματος στη θέση των Δ, Φ, Υ μπορούμε αντίστοιχα να γράψουμε B', Γ', X'. Επίσης, στη θέση του Π μπορούμε να γράψουμε Z'.

Η **7** μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:
α) Κανένας αριθμός που διαιρείται με το 6 δεν είναι πρώτος.
β) Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε δεν είναι πρώτος.
γ) $\Delta \subset X$
Στον τελευταίο αυτόν τρόπο δεν απαιτούνται νέα σύμβολα.

Όλες οι εκφράσεις 1-7 είναι αληθείς εκτός από την 6. Αυτή είναι ψευδής γιατί ο 2 είναι πρώτος αριθμός.

Όλα τα σύνολα των παραπάνω παραδειγμάτων είναι απειροσύνολα, αλλά αυτό δεν δημιουργεί καμιά ειδική δυσκολία.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λέξη «όλα» σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να σημαίνει στην πράξη «κανένας».
1. Όλοι όσοι έχετε απαντήσει στην τελευταία ερώτηση μπορείτε να προχωρήσετε στην επόμενη.
2. Αν έχετε απαντήσει στην τελευταία ερώτηση, μπορείτε να προχωρήσετε στην επόμενη.
Οι προτάσεις **1** και **2** είναι προφανώς ισοδύναμες και είναι επίσης σαφές από τη **2** πως το «όλοι» στην **1** μπορεί να είναι και κανένας.

«Όλοι όσοι έχουν ύψος μεγαλύτερο από ένα μίλι πρέπει να βγουν έξω από το δικαστήριο». (Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων). *Μπορείτε να γράψετε αυτή την πρόταση σύμφωνα με τον τύπο «αν... τότε...»; Αυτό σημαίνει ότι οπωσδήποτε υπήρχε κάποιος ψηλότερος από ένα μίλι μέσα στο δικαστήριο;*
«Όλοι όσοι έχουν κάνει λάθος πρέπει να διορθώσουν την εργασία τους». Αυτό σημαίνει πως οπωσδήποτε έχουν γίνει λάθη;
Φτιάξτε μόνοι σας μερικές προτάσεις στις οποίες η λέξη «όλα» μπορεί στην πραγματικότητα να σημαίνει «κανένα» και μερικές στις οποίες το «όλα» να είναι σίγουρα «κανένα». Μπορείτε να βρείτε περιπτώσεις στις οποίες η λέξη «μερικά» μπορεί να είναι «κανένα»;

Η πρόταση *«Όλοι όσοι έχουν κάνει λάθος πρέπει να διορθώσουν την εργασία τους»* δεν σημαίνει ότι πρέπει **οπωσδήποτε** να έχουν γίνει μερικά λάθη.

Είναι φυσικό να σκεφτόμαστε ότι η λέξη «μερικά» σημαίνει κάτι λιγότερο από «όλα». Και η έκφραση «μερικά πράγματα» σημαίνει οπωσδήποτε λιγότερα από την έκφραση «όλα τα πράγματα», με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα πράγματα για τα οποία γίνεται λόγος υπάρχουν πράγματι όλα. Αλλά όπως έχουμε δει, η λέξη «όλα» μπορεί να σημαίνει «κανένα», ενώ η λέξη «μερικά» πάντα σημαίνει «το λιγότερο ένα» κι έτσι δεν μπορεί να είναι «κανένα». Σημειώστε, επίσης, ότι εκφράσεις που περιέχουν τη λέξη «μερικά» δεν μπορούν να διατυπωθούν με τη χρήση των λέξεων «αν... τότε...» χωρίς τη σύγχρονη εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας: Η έκφραση «Μερικά τρίγωνα είναι κόκκινα» δεν σημαίνει το ίδιο με την έκφραση «Αν ένα σχήμα είναι τρίγωνο, τότε είναι κόκκινο» γιατί αυτή η τελευταία σημαίνει ότι αν ένα σχήμα είναι τρίγωνο, οπωσδήποτε θα είναι κόκκινο και έτσι **όλα** τα τρίγωνα είναι κόκκινα. Εντούτοις, η έκφραση «Μερικά τρίγωνα είναι κόκκινα» σημαίνει το ίδιο με την έκφραση «Αν ένα σχήμα είναι τρίγωνο, τότε μπορεί να είναι κόκκινο». Εδώ η έννοια της πρότασης «μπορεί να είναι κόκκινο» είναι ότι «υπάρχει μια σίγουρη πιθανότητα, μεγαλύτερη από το μηδέν, ότι είναι κόκκινο». (Αν το «μπορεί να είναι κόκκινο» χρησιμοποιείται έτσι ώστε να σημαίνει κάτι λιγότερο ακριβές από αυτό, τότε πιθανώς δεν σημαίνει τίποτε απολύτως). Μια προσπάθεια να διατυπώσουμε με τις λέξεις «αν... τότε...» μια έκφραση που περιέχει τη λέξη «μερικά» κάνει τη σχέση μεταξύ των λέξεων «αν» και «όλα» πολύ φανερή.

$\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$

Οι λέξεις «αν... τότε...» μπορούν να αντικατασταθούν με το σύμβολο ενός βέλους $\Rightarrow$ και αυτός ο τρόπος συμβολισμού είναι πολύ χρήσιμος.

Η έκφραση «αν p, τότε q» γράφεται $p \Rightarrow q$ και συχνά διαβάζεται «p συνεπάγεται q» παρά το γεγονός ότι η αντικατάσταση των p και q από συγκεκριμένες προτάσεις δεν οδηγεί σε έκφραση διατυπωμένη σε στρωτή γλώσσα από γραμματική άποψη. Εδώ, όμως, προτείνεται στα παιδιά πως οπουδήποτε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\Rightarrow$ θα πρέπει να διαβάζεται σαν «αν... τότε....». Πάντως, ο συμβολισμός αυτός έχει το μεγάλο πλεονέκτημα ότι δείχνει καθαρά την εξάρτηση της q από την p και έτσι είναι ολοφάνερο πως η έκφραση $q \Rightarrow p$ είναι κάτι τελείως διαφορετικό από την $p \Rightarrow q$.

Αν και οι εκφράσεις $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ είναι τελείως διαφορετικές και η αλήθεια της μιας δεν συνεπάγεται την αλήθεια της άλλης, μερικές φορές τυχαίνει να είναι και οι δύο αληθείς και αυτό συμβολίζεται γράφοντας $p \Leftrightarrow q$.
(Η έκφραση $p \Leftrightarrow q$ μπορεί να θεωρηθεί συντομία των $p \Rightarrow q$ και $p \Leftarrow q$, όπου αυτό το $p \Leftarrow q$ είναι ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής του $q \Rightarrow p$).

Η έκφραση $p \Leftrightarrow q$ μπορεί να διαβαστεί «αν p τότε q, και αν q τότε p».
(Μπορεί επίσης να διαβαστεί «p αν και μόνο αν q», αλλά σε αυτό το στάδιο η χρήση της φράσης «μόνο αν» δημιουργεί δυσκολίες που θα συζητηθούν λίγο πιο κάτω).

Σαν ένα παράδειγμα της χρησιμότητας του συμβόλου $\Leftrightarrow$ έχουμε:

> Ο n είναι άρτιος αριθμός $\Rightarrow$ ο $(n+1)$ είναι περιττός
> **και επίσης**
> Ο $(n+1)$ είναι περιττός αριθμός $\Rightarrow$ ο n είναι άρτιος.

Άρα μπορούμε να γράψουμε:

> Ο n είναι άρτιος αριθμός $\Leftrightarrow$ ο $(n+1)$ είναι περιττός αριθμός.

Από την άλλη μεριά,

> ενώ είναι αλήθεια ότι:
> Ο n είναι άρτιος $\Rightarrow$ ο $(2n+1)$ είναι περιττός,
> **δεν** είναι αλήθεια ότι:
> Ο $(2n+1)$ είναι περιττός $\Rightarrow$ ο n είναι άρτιος,

Έτσι θα ήταν **λάθος** να γράψουμε:

> Ο n είναι άρτιος $\Leftrightarrow$ ο $(2n+1)$ είναι περιττός.

Χρειάζεται προσοχή ώστε να μη γίνεται σύγχυση μεταξύ του συμβόλου $\Leftrightarrow$ (ή του $\Rightarrow$) και του συμβόλου = της ισότητας. Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ εκφράζει μια σχέση μεταξύ προτάσεων (για την ακρίβεια, ανοιχτών προτάσεων), χωρίς να έχει υπάρξει καμιά αναφορά στο αν αυτές οι προτάσεις είναι «ίσες». Έτσι έχουμε:

$2 + 3 = 5$ (όχι $2 + 3 \Leftrightarrow 5$)

αλλά

$(x > 2) \Leftrightarrow (2x > 4)$ (όχι $(x > 2) \Leftrightarrow (2x > 4)$)

Είναι χρήσιμο τώρα να εξετάσουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει όταν σε μια έκφραση «$p \Rightarrow q$» και στην αντίστροφή της «$q \Rightarrow p$» αντικαταστήσουμε τις προτάσεις p και q με τις αρνήσεις τους. Η άρνηση της p, η οποία μπορεί να γραφτεί «όχι - p», είναι μια πρόταση που είναι ψευδής αν η p είναι αληθής και αληθής αν η p είναι ψευδής. (Αν η p και η όχι - p είναι ανοιχτές προτάσεις, βέβαια, δεν μπορούν να είναι ούτε αληθείς ούτε ψευδείς. Εκείνο που εννοείται εδώ είναι ότι η όχι - p γίνεται ψευδής οποτεδήποτε οι τιμές που θα πάρουν οι μεταβλητές κάνουν την p αληθή, και το αντίστροφο).

«Αν ο Γιάννης είναι πατέρας της Μαίρης, τότε ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τη Μαίρη». Νομίζετε πως αυτή η πρόταση είναι σωστή;

«Αν ο Γιάννης δεν είναι πατέρας της Μαίρης, τότε ο Γιάννης δεν είναι μεγαλύτερος από τη Μαίρη». Είναι και αυτή η πρόταση σωστή;

Η πρώτη πρόταση είναι αληθής, ενώ η δεύτερη ψευδής.

Ποιες προτάσεις σε καθένα από τα ακόλουθα ζευγάρια προτάσεων είναι αληθείς;

1. α) *Αν σήμερα είναι Δευτέρα, τότε αύριο είναι Τρίτη.*
β) *Αν σήμερα δεν είναι Δευτέρα, τότε αύριο δεν είναι Τρίτη.*

2. α) *Αν* $n = -1$, *τότε* $n^2 = +1$
β) *Αν* $n \neq -1$, *τότε* $n^2 \neq +1$ *(Το σύμβολο* $\neq$ *σημαίνει «δεν είναι ίσο με»).*

3. α) *Αν ο αριθμός* n *είναι άρτιος, τότε ο αριθμός* n^2 *είναι πολλαπλάσιος του* 4.
β) *Αν ο αριθμός* n *δεν είναι άρτιος, τότε ο αριθμός* n^2 *δεν είναι πολλαπλάσιο του* 4.

Οι **1**α και **1**β είναι και οι δύο σωστές.
Η **2**α είναι αληθής, αλλά η **2**β είναι ψευδής. (Αν $n \neq -1$, τότε το n μπορεί να είναι +1).
Οι **3**α και **3**β είναι και οι δύο σωστές.

Έστω ότι η p είναι:	*σήμερα είναι Παρασκευή*
και η q είναι:	*χθες ήταν Πέμπτη.*
Τότε η (όχι - p) είναι:	*σήμερα δεν είναι Παρασκευή,*
η (όχι - q) είναι:	*χθες δεν ήταν Πέμπτη.*
Η $p \Rightarrow q$ *είναι:*	*αν σήμερα είναι Παρασκευή, τότε χθες ήταν Πέμπτη.*
Η (όχι - p) $\Rightarrow$ *(όχι - q) είναι:*	*αν σήμερα δεν είναι Παρασκευή, τότε χθες δεν ήταν Πέμπτη.*

Τι σημαίνουν τα παρακάτω;

$q \Rightarrow p$ $\quad p \Rightarrow$ *(όχι - q)* $\quad$ *(όχι - q)* $\Rightarrow$ *(όχι - p)*

Ποιες από αυτές τις τρεις είναι αληθείς;

Η $q \Rightarrow p$ σημαίνει: Αν χθες ήταν Πέμπτη, τότε σήμερα είναι Παρασκευή.

Η p $\Rightarrow$ (όχι - q) σημαίνει: Αν σήμερα είναι Παρασκευή, τότε χθες δεν ήταν Πέμπτη.
Η (όχι - q) $\Rightarrow$ (όχι - p) σημαίνει: Αν χθες δεν ήταν Πέμπτη, τότε σήμερα δεν είναι Παρασκευή.
Η πρώτη και η τρίτη από αυτές είναι αληθείς.

Δηλαδή, η αλήθεια της «p $\Rightarrow$ q» δεν εξασφαλίζει την αλήθεια ή το ψέμα της έκφρασης «(όχι - p) $\Rightarrow$ (όχι - q)».

Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς:

Αν ο Γιάννης δεν είναι μεγαλύτερος από τη Μαίρη, τότε ο Γιάννης δεν είναι πατέρας της Μαίρης.
Αν αύριο δεν είναι Τρίτη, τότε σήμερα δεν είναι Δευτέρα.
Αν $n^2 \neq +1$, *τότε* $n \neq -1$
Αν ο αριθμός n^2 *δεν είναι πολλαπλάσιο του* 4, *τότε ο αριθμός* n *δεν είναι άρτιος.*

Αν γνωρίζετε ότι η p $\Rightarrow$ q είναι αληθής, μπορείτε να πείτε ότι η (όχι - q) $\Rightarrow$ (όχι - p) είναι αληθής, χωρίς να γνωρίζετε τι σημαίνουν οι προτάσεις p και q;

Και οι 4 προτάσεις είναι αληθείς.

Δηλαδή, οποιαδήποτε και να είναι η έννοια των p και q, η πρόταση «(όχι - q) $\Rightarrow$ (όχι - p)» είναι αληθής αν η πρόταση «p $\Rightarrow$ q» είναι αληθής.

ΜΟΝΟ ΑΝ

Μια τελευταία λέξη, την οποία αξίζει να εξετάσουμε, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τη λέξη «αν», είναι η λέξη «μόνο». Η μαθηματική χρήση της φράσης «μόνο αν» είναι μάλλον διαφορετική από εκείνη της καθημερινής ομιλίας, αλλά, όπως και με τη λέξη «ή», είναι περισσότερο ενδιαφέρον και χρήσιμο σε αυτό το αρχικό στάδιο να εξετάσουμε πώς χρησιμοποιείται η φράση αυτή, παρά να επιμείνουμε σε μαθηματικές λεπτομέρειες που μπορούν να εξεταστούν πολύ αργότερα.

Τι εννοώ όταν λέω πως «Θα πάω μόνο αν πάει ο Γιάννης»; Οπωσδήποτε εννοώ ότι «Δεν θα πάω αν δεν πάει ο Γιάννης». Μήπως επίσης εννοώ ότι «Θα πάω **οπωσδήποτε** αν πάει ο Γιάννης»; Συνήθως η φράση κατανοείται με αυτή την έννοια και για να μην μπορεί να κατανοηθεί έτσι θα πρέπει να πω κάτι τέτοιο: «Θα πάω μόνο αν πάει ο Γιάννης, και ίσως ακόμη ούτε και τότε».

Υποθέστε, εντούτοις, ότι λέω «Θα έχει άλλοθι μόνο αν είναι αθώος». Ενώ αυτό ολοφάνερα σημαίνει ότι «Δεν θα έχει άλλοθι αν δεν είναι αθώος», ίσως να μη σημαίνει ότι «Θα έχει **οπωσδήποτε** άλλοθι αν είναι αθώος».

Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι δημιουργείται μια αμφιβολία όταν χρησιμοποιείται η φράση «μόνο αν». Στη συνηθισμένη ομιλία, μια πρόταση του τύπου

«p μόνο αν q»

μερικές φορές σημαίνει

«(όχι - p) αν (όχι -q)»

δηλαδή «αν (όχι - q), τότε (όχι - p)» ή ισοδύναμα «$p \Rightarrow q$»

και μερικές φορές σημαίνει

«(όχι - p) αν (όχι - q) και επίσης p αν q»

δηλαδή «$p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$» ή ισοδύναμα «$p \Leftrightarrow q$»

Στα Μαθηματικά, αυτή η αμφιβολία αποφεύγεται ορίζοντας τη φράση «μόνο αν» πολύ προσεκτικά και χρησιμοποιώντας φράσεις όπως «αν και μόνο αν». Αυτές δεν είναι συνηθισμένες στην καθημερινή ομιλία και εκείνο που εδώ προτείνεται είναι ότι θα πρέπει να σημειωθούν οι τρόποι με τους οποίους συνήθως χρησιμοποιείται η φράση «μόνο αν» και να δοθεί προσοχή στο πώς ερμηνεύεται.

Σημειώστε ότι, ενώ στην καθημερινή ομιλία οι ισοδύναμοι τύποι «αν p τότε q» και «q αν p» απαντώνται εξίσου συχνά, είναι πολύ πιο συνηθισμένο να χρησιμοποιείται ο τύπος «q μόνο αν p» από ότι ο τύπος «μόνο αν p, τότε q».

Υπάρχει άλλο ένα σημείο που πρέπει να τονιστεί. Στην καθημερινή ομιλία, μια πρόταση της μορφής «αν p, τότε q» ή, ισοδύναμα, «q αν p» συχνά χρησιμοποιείται έτσι ώστε να σημαίνει $p \Rightarrow q$ **και επίσης** (όχι - p) $\Rightarrow$ (όχι - q) δηλαδή $q \Rightarrow p$.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα:

«Θα πάω αν πάει ο Γιάννης».

Πολύ συχνά (ανάλογα, ίσως, με τον τόνο της φωνής) κάποιος θα καταλάβαινε όχι μόνο αυτό που είπε ο ομιλητής, αλλά εξίσου καλά και το αντίθετο:

«Δεν θα πάω αν δεν πάει ο Γιάννης».

Επειδή οι αμφιβολίες που δημιουργεί η χρήση της φράσης «μόνο αν» στην καθημερινή ομιλία είναι τόσο βαθιά ριζωμένες, δεν είναι λογικό να προσπαθήσουμε να κάνουμε τα παιδιά να τις αποφύγουν. Εκείνο στο οποίο αξίζει να επιμείνουμε είναι ότι αν κάποιος εννοεί μια πρόταση και την αντίθετή της θα πρέπει να το πει ξεκάθαρα και όχι απλά να το αφήσει να εννοηθεί.

«Αν με καλέσεις στο πάρτι σου, θα σε καλέσω στο δικό μου».

Τι παριστάνουν τα p και q αν η πρόταση αυτή γραφεί σύμφωνα με τη μορφή $p \Rightarrow q$;
Νομίζετε πως ο ομιλητής εννοούσε περισσότερα από όσα είπε; Μήπως εννοούσε ότι και (όχι - p) $\Rightarrow$ (όχι q);
Τι θα έπρεπε να πει για να κάνει το νόημα της πρότασης εντελώς ξεκάθαρο;

p: θα με καλέσεις στο πάρτι σου
q: θα σε καλέσω στο δικό μου

Αν ο ομιλητής εννοούσε επιπλέον ότι (όχι - p) $\Rightarrow$ (όχι - q), θα έπρεπε να έχει προσθέσει: «και αν δεν με καλέσεις στο δικό σου, δεν θα σε καλέσω στο δικό μου».

Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς, όταν οι m και n συμβολίζουν θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς;

1. $m^2 = n^2$ αν $m = n$
2. $m = n$ αν $m^2 = n^2$

Η **1** είναι αληθής, ενώ η **2** είναι ψευδής (το m μπορεί να ισούται με το -n αν $m^2 = n^2$).

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

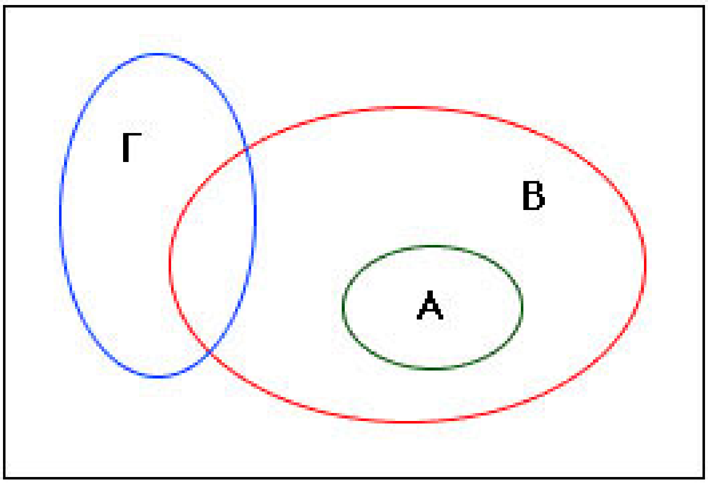
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφορα προβλήματα, καθένα από τα οποία χρειάζεται προσεκτική λογική θεώρηση. Η συλλογή των προβλημάτων δεν είναι συστηματική και δεν έχει γίνει καμιά προσπάθεια να ταξινομηθούν ανάλογα με τη δυσκολία τους.

Δεν είσαι ευτυχισμένος αν δεν έχεις να τρως όσο σου είναι αρκετό.
Όλοι οι πλούσιοι έχουν όσο φαγητό θέλουν.
Άρα όλοι οι πλούσιοι άνθρωποι είναι ευτυχισμένοι.

Είναι αυτό ένα λογικό επιχείρημα;

Όχι. Η πρώτη πρόταση δεν είναι ισοδύναμη με την αντίστροφή της: «Είσαι ευτυχισμένος αν έχεις να τρως αρκετά». Η πρώτη πρόταση δεν διαψεύδεται από την ύπαρξη ενός πλούσιου ανθρώπου ο οποίος έχει αρκετό φαγητό αλλά δεν είναι ευτυχισμένος.

Το επιχείρημα μπορεί να παρασταθεί με ένα διάγραμμα. Η πρώτη πρόταση δηλώνει ότι το σύνολο Α (εκείνων που δεν έχουν να τρώνε αρκετά) είναι υποσύνολο του συνόλου Β (εκείνων που δεν είναι ευτυχισμένοι). Το σύνολο Γ των πλούσιων ανθρώπων, από τη δεύτερη πρόταση, δεν έχει κοινά στοιχεία με το σύνολο Α, αλλά μπορεί περίφημα να έχει κοινά στοιχεία με το σύνολο Β.



Σημειώστε ότι, όταν συζητάμε για τη **λογικότητα** του επιχειρήματος, ενδιαφερόμαστε μόνο να αποφασίσουμε αν ή όχι το συμπέρασμα που προβάλλεται προκύπτει από τις δύο πρώτες προτάσεις (υποθέσεις). Είναι αδιάφορο αν αυτές οι προτάσεις είναι αληθινές ή όχι.
Πάντως, αυτό το τελευταίο **μας ενδιαφέρει** αν θέλουμε να μάθουμε εκτός από τη λογικότητα του επιχειρήματος και το αν το συμπέρασμα είναι αληθινό, καθώς και αν ο συλλογισμός έχει κάποια αξία.

1. *Αν η Α ποδοσφαιρική ομάδα μπορεί να νικήσει τη Β, τότε σίγουρα μπορεί να νικήσει και τη Γ.*
2. *Αλλά η Α νίκησε τη Β την περασμένη βδομάδα.*
3. *Άρα η Α οπωσδήποτε θα νικήσει τη Γ όταν παίξουν την επόμενη βδομάδα.*

Σχολιάστε το επιχείρημα και τις προτάσεις από τις οποίες αποτελείται.

Το επιχείρημα είναι ολοφάνερα μη λογικό, εξαιτίας της αλλαγής του ρήματος από «μπορεί να νικήσει» στην **1** σε «θα νικήσει» στην **3**. Από τη **2** προκύπτει σίγουρα ότι η Α ποδοσφαιρική ομάδα μπορεί να νικήσει τη Β, κι έτσι από την **1** ότι μπορεί να νικήσει και τη Γ. Αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι **θα νικήσει** τη Γ την επόμενη βδομάδα.

Σημειώστε ότι η **2** είναι μια πρόταση που αναφέρεται σε πραγματικό γεγονός και μπορεί σίγουρα να χαρακτηριστεί αληθής ή ψευδής. Η **1** όμως μπορεί να είναι μόνο μια γνώμη κι έτσι, ακόμη και αν το επιχείρημα ήταν λογικό, το συμπέρασμα δεν θα ήταν απαραίτητα αληθινό εκτός αν η **1** ήταν αληθινή. Πολλά από τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή περιέχουν σαν υπόθεση μια πρόταση, η αλήθεια της οποίας μπορεί να είναι μόνο θέμα γνώμης κάποιου ανθρώπου και τίποτα περισσότερο.

1. *Ο Γιάννης και μερικά άλλα αγόρια απουσίαζαν από το σχολείο σήμερα αλλά όλα τα κορίτσια είχαν έρθει.*
2. *Όλα τα παιδιά που απουσίαζαν χθες, απουσίαζαν και σήμερα.*

Υποθέτοντας ότι αυτές οι δύο προτάσεις είναι αληθείς, μπορείτε να πείτε:

α) *Αν η Μαίρη απουσίαζε χθες;*
β) *Αν ο Γιάννης απουσίαζε χθες;*
γ) *Αν χθες απουσίαζαν μερικά αγόρια;*

α) Αν η Μαίρη απουσίαζε χθες, θα έπρεπε, από τη **2**, να απουσιάζει και σήμερα. Αλλά όλα τα κορίτσια είχαν έρθει στο σχολείο σήμερα σύμφωνα με την **1**. Άρα η Μαίρη **δεν απουσίαζε** χθες.
β) Δεν μπορούμε να πούμε, από τις **1** και **2**, αν ο Γιάννης απουσίαζε χθες ή όχι. Γιατί αν και από την **1** προκύπτει ότι απουσίαζε σήμερα, από τη **2** δεν προκύπτει ότι **μόνο** αυτοί που απουσίαζαν χθες απουσίαζαν και σήμερα.
γ) Εδώ τα πράγματα είναι πιο δύσκολα. Ολοφάνερα, όλα τα κορίτσια είχαν πάει στο σχολείο χθες, κι έτσι αν είχαν πάει και όλα τα αγόρια, κανένα παιδί δεν θα απουσίαζε χθες. Η **2** συνήθως κατανοείται να σημαίνει ότι το λιγότερο μερικά παιδιά απουσίαζαν χθες, και αν είναι έτσι, είναι ξεκάθαρο πως πρέπει να ήταν αγόρια. Εντούτοις, όπως έχει ήδη τονιστεί, σε μερικές περιπτώσεις η λέξη «όλα» μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τέτοιο τρόπο που να σημαίνει «κανένα», και αν αυτό έχει συμβεί στη **2**, δεν μπορούμε να πούμε από αυτές τις δύο προτάσεις αν απουσίαζαν χθες ή όχι μερικά αγόρια. Για να απαντήσουμε στην τρίτη ερώτηση, όπως και σε πολλά άλλα λογικά προβλήματα, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις ακριβείς σημασίες των λέξεων και των προτάσεων που μελετάμε.

Σχολιάστε το ακόλουθο επιχείρημα. Είναι λογικό; Αν όχι, μπορείτε να το συμπληρώσετε με μερικές άλλες προτάσεις που να το κάνουν λογικό; Είναι πιθανό να πεισθεί ο πατέρας του παιδιού για την αλήθεια του συμπεράσματος;

1. *Είναι επικίνδυνο για μένα να μένω έξω στο σκοτάδι ολομόναχος.*
2. *Αν με κρατήσουν στο σχολείο μέχρι το τέλος, δεν μπορώ να επιστρέψω σπίτι πριν νυχτώσει.*
3. *Όταν φτάνω στο σχολείο πολύ αργά, με κρατάνε πάντα μέχρι το τέλος.*
4. *Οποτεδήποτε πάω με τα πόδια στο σχολείο, φτάνω πολύ αργά.*
5. *Αν δεν έχω ποδήλατο, πρέπει να πηγαίνω με τα πόδια στο σχολείο.*
6. *Ώστε, αν δεν μου πάρεις ένα ποδήλατο, θα είναι επικίνδυνο για μένα όταν γυρίζω από το σχολείο στο σπίτι.*

Το επιχείρημα όπως είναι δεν είναι λογικό, γιατί κανένα συμπέρασμα δεν μπορεί να βγει από τις **1** και **2** μαζί, αφού η **2** αναφέρεται στο να είναι το παιδί **ολομόναχο** στο σκοτάδι. Ακόμη, τίποτα στις προτάσεις **1-5** δεν εξασφαλίζει τον ισχυρισμό στην **6** σχετικά με τις συνέπειες που θα υποστεί το παιδί αν **δεν του πάρουν** ποδήλατο.
Εντούτοις, τα δύο χάσματα που υπάρχουν στο επιχείρημα μπορούν να συμπληρωθούν από δύο ακόμη προτάσεις, που ίσως παραλήφθηκαν επειδή ήταν πολύ φανερές για να χρειάζεται να δηλωθούν:

2′. *Αν με κρατήσουν μέχρι το τέλος του σχολείου, θα πρέπει να γυρίσω σπίτι ολομόναχος.*
5′. *Δεν θα έχω ποδήλατο, εκτός αν εσύ μου πάρεις ένα. (Προσέξτε ότι το «εκτός» σημαίνει «αν... τότε...»).*

Το συμπέρασμα **6** μπορεί να εξαχθεί από τις υποθέσεις **1-5**, **2** και **5**.

Αν και το επιχείρημα, μετά την πρόσθεση των προτάσεων **2′** και **5′**, είναι λογικό, ο πατέρας του παιδιού μπορεί να μην πεισθεί για την αλήθεια του **συμπεράσματος** γιατί μπορεί να αμφισβητήσει λογικά την **αλήθεια** μερικών από τις υποθέσεις. Εδώ ολοφάνερα της **4**.

Η αστυνομία απέδειξε ότι ο διαρρήκτης, που υποψιάζονται πως είναι ο κ. Green, έφτασε στο Newtown ή με το τρένο που έφτασε εκεί στις 8.15 μ.μ. ή με εκείνο που έφτασε στις 9 μ.μ. Επίσης ότι, μετά την άφιξή του, παρέμεινε στην πόλη τουλάχιστο μέχρι τις 10 μ.μ. και μετά έφυγε ή με το τρένο που έφυγε στις 10 μ.μ. ή με εκείνο που έφυγε στις 10.30 μ.μ.
Ο Α είπε ότι είδε τον κύριο Green στο Newtown στις 8.50 μ.μ., ο Β ότι τον είδε στο Newtown στις 11.30 μ.μ. και οι Γ, Δ, Ε ότι τον είδαν, κατά το βράδυ, σε ένα ξενοδοχείο 20 χιλιόμετρα μακριά από το Newtown, ο Γ στις 9.30 μ.μ., ο Δ στις 10.45 μ.μ. και ο Ε στις 8.20 μ.μ.
Υποθέτοντας ότι ο κύριος Green ήταν ο διαρρήκτης,
α) *Ποια από τις πέντε μαρτυρίες πρέπει να είναι ψέμα;*
β) *Πώς μπορείτε να βεβαιωθείτε ότι τουλάχιστο μια ακόμη μαρτυρία είναι ψέμα;*
γ) *Υπάρχει κάποια μαρτυρία, από αυτές τις πέντε, οπωσδήποτε αληθινή;*

α) Η μαρτυρία του Γ πρέπει να είναι ψευδής. Η μαρτυρία του Β δεν είναι απαραίτητα ψευδής, γιατί ο κύριος Green θα μπορούσε να έχει επιστρέψει ξανά στο Newtown.
β) Η μαρτυρία του Α ή του Ε (ή και των δύο) πρέπει να είναι ψευδής. Γιατί αν ο κύριος Green ήταν στο Newtown στις 8.50 μ.μ. θα έπρεπε να έχει φτάσει στις 8.15 μ.μ. και δεν θα μπορούσε να είναι 20 χιλιόμετρα μακριά στις 8.20 μ.μ. Έτσι, αν η

μαρτυρία του Α δεν είναι ψευδής, η μαρτυρία του Ε είναι οπωσδήποτε. Πάντως, οι μαρτυρίες των Β και Δ δεν είναι ασυμβίβαστες.
γ) Δεν υπάρχει μαρτυρία που πρέπει οπωσδήποτε να είναι αληθινή.

Αν ο κύριος Green δεν ήταν ο διαρρήκτης, δεν μπορεί να λεχθεί τίποτα σχετικό με την αλήθεια ή μη των μαρτυριών αυτών. Για παράδειγμα, δεν μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι η μαρτυρία του Α ή του Ε πρέπει να είναι ψευδής, γιατί αν ο κύριος Green δεν ήταν ο διαρρήκτης, θα μπορούσε να έχει φτάσει στο Newtown, με το αυτοκίνητο, στις 8.50 μ.μ. και ακόμη να βρίσκεται 30 λεπτά νωρίτερα σε ένα ξενοδοχείο που είναι 20 χιλιόμετρα μακριά.

Προσπαθήστε να γράψετε τι ακριβώς σημαίνουν οι ακόλουθες δύο προτάσεις:
Τα σκυλιά πρέπει να συνοδεύονται από κάποιον στο πάρκο.
Τα αυτοκίνητα πρέπει να παρκάρονται στον χώρο παρκαρίσματος.

Μπορείτε να γράψετε με τον ίδιο τρόπο τι σημαίνει η ακόλουθη πρόταση;
Τα βάτρα πρέπει να περκάρονται στο περίδιο.

Μπορεί να σημαίνει και κάτι άλλο;
Πώς συμβαίνει να είστε σίγουροι για τη σημασία των δύο πρώτων προτάσεων;
Θα μπορούσαν ίσως να σημαίνουν κάτι διαφορετικό από αυτό που εσείς γράψατε ότι σημαίνουν;

Σχολιάστε αυτές τις δύο προτάσεις:
Οδηγείτε προσεχτικά μέσα στη σήραγγα.
Κουνήστε καλά το μπουκάλι.

Η πρώτη πρόταση ολοφάνερα σημαίνει: Όλα τα σκυλιά που βρίσκονται στο πάρκο πρέπει να συνοδεύονται από κάποιον. Ή: Αν ένα σκυλί βρίσκεται στο πάρκο, τότε πρέπει να συνοδεύεται από κάποιον.

Η δεύτερη πρόταση επίσης ολοφάνερα σημαίνει: Τα αυτοκίνητα μπορούν να παρκάρονται εδώ κοντά, μόνο στον χώρο παρκαρίσματος. ‘Η: Αν ένα αυτοκίνητο πρόκειται να παρκαριστεί εδώ κοντά, τότε πρέπει να παρκαριστεί στον χώρο παρκαρίσματος.

Αυτές οι δύο προτάσεις κάνουν φανερό ότι δεν μπορούμε να πούμε τι σημαίνει η τρίτη πρόταση, χωρίς να ξέρουμε τι σημασία των λέξεων βάτρα, περκάρομαι και περίδιο.

Αν παίρναμε σαν οδηγό την πρώτη πρόταση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η τρίτη σημαίνει:
Αν ένα βάτρο είναι στο περίδιο, τότε πρέπει να είναι περκαρισμένο.

Αν παίρναμε σαν οδηγό τη δεύτερη πρόταση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η τρίτη σημαίνει:
Αν ένα βάτρο πρόκειται να περκαριστεί εδώ κοντά, τότε θα πρέπει να περκαριστεί στο περίδιο.

Υπάρχουν πάντως κι άλλες πιθανότητες. Παράδειγμα:
Τα βάτρα πρέπει να φέρνονται στο περίδιο και να περκάρονται εκεί.

Όλες οι προτάσεις είναι στην πραγματικότητα λογικά ασυμπλήρωτες. Αν η σημασία τους διατυπωθεί με μια «αν... τότε...» έκφραση, θα δούμε ότι η πρόταση που εισάγεται από τη λέξη «αν» έχει παραληφθεί από αυτές. Αυτό δεν δημιουργεί καμιά αμφιβολία για τη σημασία των δύο πρώτων προτάσεων, γιατί γνωρίζουμε ποια πράγματα επιτρέπονται και ποια απαγορεύονται σχετικά με τα σκυλιά και με τα αυτοκίνητα. Δεν είναι πιθανό να σκεφτούμε ότι η πρώτη πρόταση σημαίνει πως αν θέλεις να συνοδεύσεις ένα σκυλί σε έναν περίπατο σ' αυτή τη γειτονιά, μπορείς να το κάνεις μόνο στο πάρκο. Ή ότι η δεύτερη πρόταση σημαίνει ότι αν θέλεις να φέρεις ένα αυτοκίνητο στον χώρο του παρκαρίσματος πρέπει να το παρκάρεις εκεί και να μην οδηγείς γύρω-γύρω. (Αυτή η τελευταία πράξη πιθανότατα **απαγορεύεται**, αλλά δεν είναι η πράξη που η πρόταση προτίθεται να απαγορεύσει).

Επειδή, όμως, δεν γνωρίζουμε τίποτα για τα βάτρα, τα περίδια και το περκάρισμα, δεν μπορούμε να διαλέξουμε μεταξύ των διαφορετικών τρόπων ερμηνείας της τρίτης πρότασης. Ο αριθμός των λογικά πιθανών τρόπων ερμηνείας οποιασδήποτε από τις προτάσεις είναι απεριόριστος και αντιστοιχεί στις αναρίθμητες πιθανές «αν» προτάσεις.

Και από τις δύο τελευταίες προτάσεις λείπει, επίσης, ένα αρχικό τμήμα που εισάγεται με τη λέξη «αν». Στην πρώτη περίπτωση το τμήμα αυτό είναι: Αν πρόκειται να οδηγήσετε μέσα στη σήραγγα. Στη δεύτερη περίπτωση είναι: Αν πρόκειται να πιείτε κάτι από το μπουκάλι.

Στη δεύτερη περίπτωση, στην πραγματικότητα, παραλείπονται και άλλες προτάσεις. Το πλήρες νόημα της πρότασης αυτής είναι κάπως έτσι: Πριν πιείτε από το μπουκάλι, κουνήστε το καλά για λίγες στιγμές μέχρις ότου το περιεχόμενο ανακατευτεί εντελώς. Η γνώση μας σχετικά με τον τρόπο που παίρνονται τα φάρμακα μας εμποδίζει να υποθέσουμε ότι πρέπει να κουνήσουμε το μπουκάλι **αφού πρώτα** πιούμε, ή ότι πρέπει να το κουνάμε όποτε το βλέπουμε.

Σχολιάστε τις ακόλουθες προτάσεις. Αν οι σημασίες μερικών από αυτές δεν είναι ξεκάθαρες, προσπαθήστε να τις ξαναγράψετε έτσι ώστε να λένε αυτό που εσείς νομίζετε ότι σημαίνουν ή θα μπορούσαν να σημαίνουν.

1. *Οι δημόσιοι κήποι θα είναι κλειστοί από τον Οκτώβριο ως τον Μάρτιο.*
2. *Δεν υπάρχουν δεξιές στροφές μπροστά.*
3. *Τα παιδιά πληρώνουν μισό εισιτήριο.*
4. *Το τραγούδι και ο χορός δεν επιτρέπονται.*
5. *Οι τυρόπιτες σε αυτό το μαγαζί είναι φθηνότερες.*
6. *Βαθμολογείσαι με άριστα αν έχεις 7 σωστές απαντήσεις.*

Οι προτάσεις αυτές (εκτός από τη 2) αν και λογικά μη πλήρεις, μπορούν στην πράξη να μη δημιουργήσουν αμφιβολίες. Όλες όμως είναι λιγότερο ή περισσότερο ελλειπείς.

1. «Από τον Οκτώβριο ως τον Μάρτιο». Περιλαμβανομένων ή μη; Οι κήποι θα είναι κλειστοί κατά τη διάρκεια του Οκτωβρίου και του Μαρτίου; Η πρόταση μπορεί να γίνει εντελώς σαφής προσθέτοντας τις λέξεις «περιλαμβανομένων» ή «μη περιλαμβανομένων». Θα μπορούσε, επίσης, να είναι σαφής στην πράξη η έκφραση «από την 1η Οκτωβρίου ως την 31η Μαρτίου» (γνωρίζοντας ότι όταν λέμε κάτι ανάλογο περιλαμβάνεται η πρώτη και η τελευταία μέρα).

2. «Δεν υπάρχουν δεξιές στροφές μπροστά». Για πόσο διάστημα; Ολοφάνερα, μόνο για μερικές εκατοντάδες μέτρα ή το πολύ για μερικά χιλιόμετρα. Η οδική αυτή ειδοποίηση θα ήταν κατά πολύ βελτιωμένη αν δινόταν και κάποια πληροφορία σχετικά με το διάστημα κατά το οποίο δεν υπάρχουν δεξιές στροφές.

3. Μέχρι ποιας ηλικίας πληρώνουν τα παιδιά μισό εισιτήριο; Μια έκφραση που δεν δημιουργεί αμφιβολίες είναι η εξής: «Μισό εισιτήριο για παιδιά 14 ετών και κάτω».

4. Η ειδοποίηση αυτή προτίθεται να απαγορεύσει το τραγούδι και να απαγορεύσει τον χορό. Όχι, δηλαδή, την ταυτόχρονη εκτέλεση και των δύο αυτών δραστηριοτήτων. Υπάρχει πάντως στη φράση μια πολύ μικρή αμφιβολία. Μια εντελώς σαφής έκφραση θα ήταν η εξής: Δεν επιτρέπεται ούτε το τραγούδι ούτε ο χορός. Η γλώσσα αυτή, όμως, είναι πομπώδης και δεν χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις σαν κι αυτή.

5. Αυτό, βέβαια, δεν έχει νόημα. Η έκφραση μπορεί να αποκτήσει νόημα αν συμπληρωθεί: «Οι τυρόπιτες σε αυτό το μαγαζί είναι φθηνότερες από όλες τις άλλες». Η πρόταση αυτή έχει νόημα, αλλά είναι σχεδόν σίγουρα ψέμα.
Η πρόταση «Οι τυρόπιτες σε αυτό το μαγαζί είναι φθηνότερες από όλες τις άλλες του ίδιου μεγέθους και ποιότητας» μπορεί να είναι αληθινή και τότε αξίζει ίσως τον κόπο να ειπωθεί.

6. Σε αυτή την πρόταση δεν ξεκαθαρίζεται αν οι ερωτήσεις που πρόκειται να γίνουν είναι 7 ή περισσότερες. Είναι ένα παράδειγμα μιας πρότασης, η οποία είναι σίγουρα σαφής (θα βαθμολογηθείς με άριστα αν απαντήσεις σωστά σε 7 ερωτήσεις), αλλά η οποία αφήνει τον αναγνώστη σε αμφιβολία σχετικά με κάτι που τον ενδιαφέρει τόσο (αν όχι ακόμη περισσότερο) όσο και αυτό που του είπαν.
Μια καλύτερη έκφραση είναι η εξής: «Θα βαθμολογηθείς με άριστα αν δώσεις 7 σωστές απαντήσεις, σε οποιοδήποτε αριθμό ερωτήσεων». Αλλά και αυτή αφήνει στον αναγνώστη αμφιβολία σχετικά με τον βαθμό που θα πάρει για μη πλήρεις απαντήσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι με καμιά συμπλήρωση η πρόταση δεν γίνεται τελείως ικανοποιητική (εκτός ίσως αν ζητηθούν μόνο πλήρεις απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις) και ότι η προηγούμενη τροποποίηση θεραπεύει μόνο το μεγαλύτερο ελάττωμα της αρχικής.

Ένα αγόρι είχε μερικά μικρά γατάκια. Κανένα από τα άσπρα γατάκια δεν είχε μάτια καστανά. Ούτε και κανένα από αυτά που ήταν ηλικίας 6 εβδομάδων ή περισσότερο. Όλα τα θηλυκά γατάκια ήταν άσπρα, και κανένα ηλικίας κάτω των 6 εβδομάδων δεν ήταν αρσενικό.
Μπορείτε να πείτε αν κάποιο από τα γατάκια είχε καστανά μάτια;

Μπορείτε να πείτε πως τα γατάκια **δεν είχαν** καστανά μάτια. Όλα τα γατάκια ηλικίας κάτω των 6 εβδομάδων ήταν θηλυκά, και άρα άσπρα. Συνεπώς κανένα γατάκι ηλικίας κάτω των 6 εβδομάδων δεν είχε μάτια καστανά. Αλλά και κανένα από αυτά που ήταν ηλικίας 6 εβδομάδων ή περισσότερο δεν είχε καστανά μάτια. Άρα κανένα γατάκι δεν είχε μάτια καστανά.

Μια μέρα ο κύριος Χ αγόρασε έναν πίνακα ζωγραφικής για τον οποίο πλήρωσε 1000 ευρώ. Την επόμενη μέρα τον επέστρεψε λέγοντας πως θέλει να τον αλλάξει και να πάρει κάποιον άλλο. Διάλεξε έναν ο οποίος κόστιζε 2000 ευρώ, και ήταν έτοιμος να φύγει παίρνοντάς τον μαζί του, όταν ο έμπορος του ζήτησε άλλα 1000 ευρώ. Ο κύριος Χ απάντησε τότε: Μα σας πλήρωσα χθες 1000 ευρώ, και μόλις σας επέστρεψα έναν πίνακα αξίας 1000 ευρώ, άρα δεν σας οφείλω τίποτα.
Υπάρχει κάποιο σφάλμα στο επιχείρημα του κυρίου Χ;

Αυτό το πρόβλημα είναι βέβαια πολύ γνωστό, αλλά συχνά προκαλεί αμηχανία σε μικρούς και μεγάλους.

Το βασικό σφάλμα του κυρίου Χ είναι ότι προσθέτει τα 1000 ευρώ που πλήρωσε και την τιμή του πρώτου πίνακα. Ο κύριος Χ ποτέ δεν είχε δικά του και τα 1000 ευρώ και τον πρώτο πίνακα. Είχε ή το ένα ή το άλλο. Όχι και τα δύο. Άρα, αν υπολογίζει τα χθεσινά 1000 ευρώ έναντι της τιμής του δεύτερου πίνακα, δεν έχει το δικαίωμα να υπολογίζει και την τιμή του πρώτου.

Σε ένα χωριό ένας ξένος ρώτησε τον κουρέα πώς πάνε οι δουλειές του.
Αυτός απάντησε: Από όλους τους άντρες του χωριού δεν ξυρίζω αυτούς που ξυρίζονται μόνοι τους, αλλά ξυρίζω όλους εκείνους που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
Ο κουρέας ξύριζε τον εαυτό του;

Ο κουρέας ή ξυρίζεται μόνος του ή όχι. Ας υποθέσουμε ότι ξυρίζεται μόνος του. Τότε είναι μεταξύ αυτών που ξυρίζονται μόνοι τους και έτσι, σύμφωνα με το πρώτο τμήμα της πρότασής τους, δεν ξυρίζει τον εαυτό του. Αυτή είναι αντίφαση, κι έτσι η υπόθεσή μας πρέπει να είναι λάθος. Άρα δεν ξυρίζεται μόνος του. Αν όμως συμβαίνει αυτό, τότε είναι μεταξύ εκείνων που δεν ξυρίζονται μόνοι τους και, σύμφωνα με το δεύτερο τμήμα της πρότασής του, μεταξύ εκείνων που ξυρίζει αυτός. Άρα ξυρίζεται μόνος του.

Αυτό θεωρείται, μερικές φορές, πρόβλημα ανυπέρβλητο. Στην πραγματικότητα η λύση είναι σχετικά απλή. Έχουμε υποθέσει πιο πάνω ότι αυτό που είπε ο κουρέας ήταν αλήθεια. Αν και δεν υπάρχει τίποτα φανερά παράλογο στην πρότασή του, δεν μπορεί να βγει τίποτα από αυτήν. Άρα η πρότασή του πρέπει να είναι ψευδής. Αφού αυτό που είπε ο κουρέας είναι ψέμα, δεν έχουμε προφανώς κανένα στοιχείο για να πούμε αν ξυρίζεται μόνος του ή όχι.

2 x 2 = 5
Ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τον πατέρα του.
Όλες οι προτάσεις μέσα σε αυτό το πλαίσιο είναι ψευδείς.
Η τελευταία πρόταση είναι αληθής;

Αν η τρίτη πρόταση είναι αληθής, τότε, αφού είναι μία από τις προτάσεις του πλαισίου, πρέπει να είναι ψευδής. Αυτό είναι σαφώς αδύνατο, κι έτσι μπορεί να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η τρίτη πρόταση πρέπει να είναι ψευδής. Αν είναι όμως ψευδής, το λιγότερο μια από τις προτάσεις του πλαισίου πρέπει να είναι αληθής. Οι δύο πρώτες είναι σίγουρα ψευδείς, άρα η τρίτη πρέπει να είναι αληθής.

Έτσι, όμως, φτάσαμε σε μια καθαρή αντίφαση: Αν η τρίτη πρόταση είναι αληθής, τότε είναι ψευδής και αν είναι ψευδής, τότε είναι αληθής. Δεν υπάρχει εύκολος τρόπος να βγει κανείς από αυτό το δίλημμα, όπως εκείνος στο πρόβλημα του κουρέα. Η παραδοχή ότι η τρίτη πρόταση του πλαισίου είναι ψευδής οδηγεί σε αντίφαση, όπως ακριβώς και η παραδοχή ότι είναι αληθής.

Το πρόβλημα, με τη μία ή την άλλη μορφή, είναι γνωστό εδώ και χιλιάδες χρόνια. Τον 6ο π.Χ. αιώνα ο Έλληνας ποιητής (από την Κρήτη) Επιμενίδης φέρεται να είπε: «Όλοι οι Κρήτες είναι ψεύτες».

Αν η πρότασή του σήμαινε «Όλοι οι Κρήτες λένε μερικές φορές ψέματα» δεν υπάρχει πρόβλημα. Αλλά αν σήμαινε «Όλες οι προτάσεις που σχηματίζουν οι Κρήτες είναι ψευδείς», τότε δημιουργούνται δυσκολίες. Αν τουλάχιστο μία πρόταση που σχημάτισε ένας Κρητικός, ο Επιμενίδης ή κάποιος άλλος, σε μια διαφορετική περίπτωση, ήταν πράγματι **αληθής**, τότε η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί με τον ίδιο τρόπο που ξεπεράστηκε η δυσκολία σχετικά με τον κουρέα: Η πρόταση του Επιμενίδη ήταν ψευδής, οπότε δεν υπάρχει καμιά αντίφαση. Ας υποθέσουμε, όμως, ότι **όλες** οι προτάσεις των Κρητών, εκτός από την «περίφημη» του Επιμενίδη, ήταν πράγματι ψευδείς. Τότε η πρότασή του είναι όπως ακριβώς η τρίτη πρόταση του προηγούμενου πλαισίου: Ψέμα αν είναι αλήθεια και αλήθεια αν είναι ψέμα.